

# Algebra Lineal y Geometría.



## Unidad n°10: Ecuación General de Segundo Grado en dos Variables.

# Contenidos

---

- *Cónicas como secciones planas de un cono circular recto. Circunferencia. Ecuación General. Circunferencia determinada por tres puntos. Intersección de rectas y circunferencias. Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Intersección de circunferencias. Elipse: Definición, Ecuación canónica. Elementos. Hipérbola: Definición, Ecuación canónica. Elementos. Parábola: Definición, Ecuación canónica. Elementos. Ecuaciones de las cónicas con otros ejes. Ecuaciones de las cónicas cuyo centro o vértice no coincide con el origen de coordenadas.*

# Bibliografía

---

- ❑ **Lic. Albino de Sunkel, María Helena- "Geometría Analítica en forma vectorial y Matricial" – Editorial Nueva Librería S.R.L. 1989. (\*)**
- ❑ **Di Pietro, Donato – Geometría Analítica- Ed. Alsina. – 1980.(\*)**
- ❑ **Lehmann, Charles – Geometría Analítica – Ed.Hispano Americana.(\*)**
- ❑ **Swokowski, Earl W. - "Cálculo con Geometría Analítica"- Grupo Editorial Iberoamericana S.A.de C.V. Edición 1993.**
- ❑ **Ruiz, Andrés- Alvarez Fernando- Límites 2. Matemáticas – Ediciones Vicens Vives S.A.- 1999**
- ❑ **De Burgos, J. - "Algebra Lineal y Geometría cartesiana"- (2da. Edición) –Mc Graw Hill- 2000**
- ❑ **D.C.Murdoch- "Geometría Analítica con Vectores y Matrices"-Edit.LIMUSA Noriega.- Edición 1990.**
- ❑ **Steinbruch - Basso.- "Geometría Analítica Plana"- Edit.Mac. Graw Hill – Ed. 1993.**

## Cónicas $\leftrightarrow Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

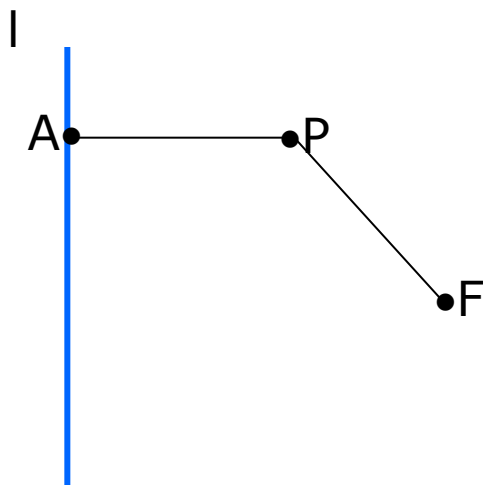
---

- Sea una recta fija **l** y un punto fijo **F** que no pertenece a l.
- **Definición General de Cónica.**
- Se llama **cónica** al lugar geométrico de los puntos del plano determinado por la recta **l** y el punto fijo **F**, tales que la **razón** entre las distancias a F y a l es siempre igual a una **constante positiva**.
- **l : directriz      F: foco**

# Excentricidad

---

$$e = \frac{|PF|}{|PA|} \Rightarrow \begin{cases} e = 1 \Rightarrow |PF| = |PA| \rightarrow \textit{Parábola} \\ e < 1 \Rightarrow |PF| < |PA| \rightarrow \textit{Elipse} \\ e > 1 \Rightarrow |PF| > |PA| \rightarrow \textit{Hipérbola} \end{cases}$$

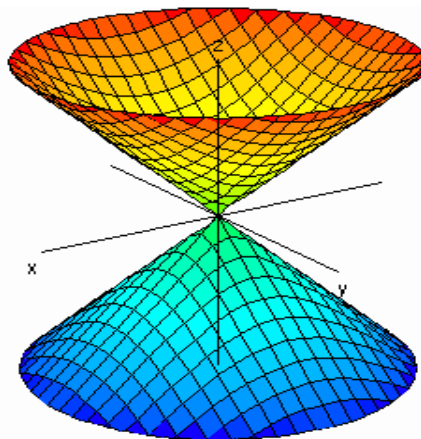


---

# Cónicas como secciones planas de un cono circular recto.

# Cónicas como secciones planas de un cono circular recto.

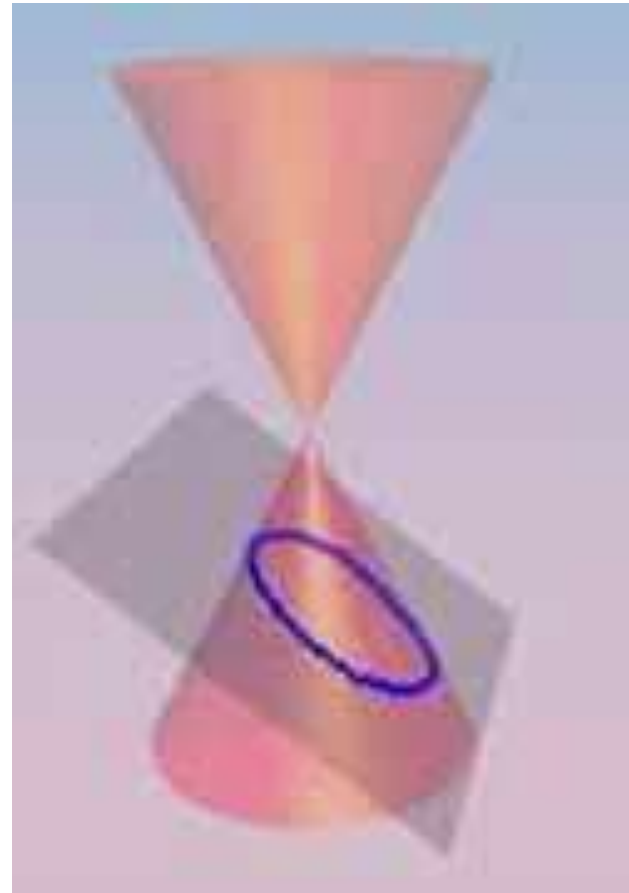
- **Superficie Cónica:** engendrada por una línea recta que se mueve de tal manera que pasa siempre por una curva fija y por un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva.
- Recta móvil: **generatriz**,  
Curva fija: **directriz**
- Punto fijo: **vértice** de superficie cónica.
- **V** : punto del espacio sobre una recta fija **e**.
- Todas las rectas que pasen por V y formen un ángulo constante con e se llama **CONO CIRCULAR RECTO**.
- **e** : **eje del cono**, **V** es el **vértice**.



# *ELIPSE.*

---

- Un plano que no pase por el vértice y no es paralelo a ninguna de las generatrices de una hoja las corta a todas y forma una curva cerrada, denominada ***ELIPSE.***

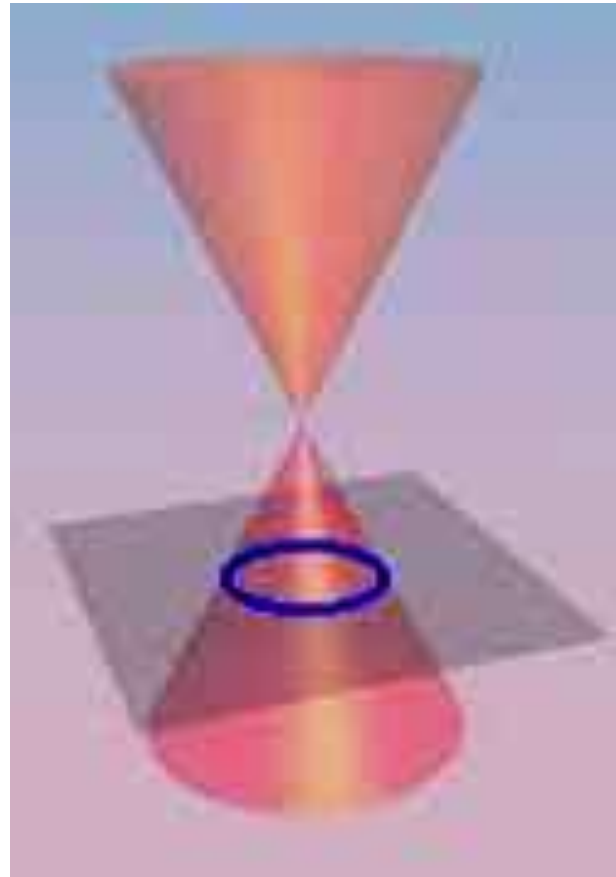




# *CIRCUNFERENCIA.*

---

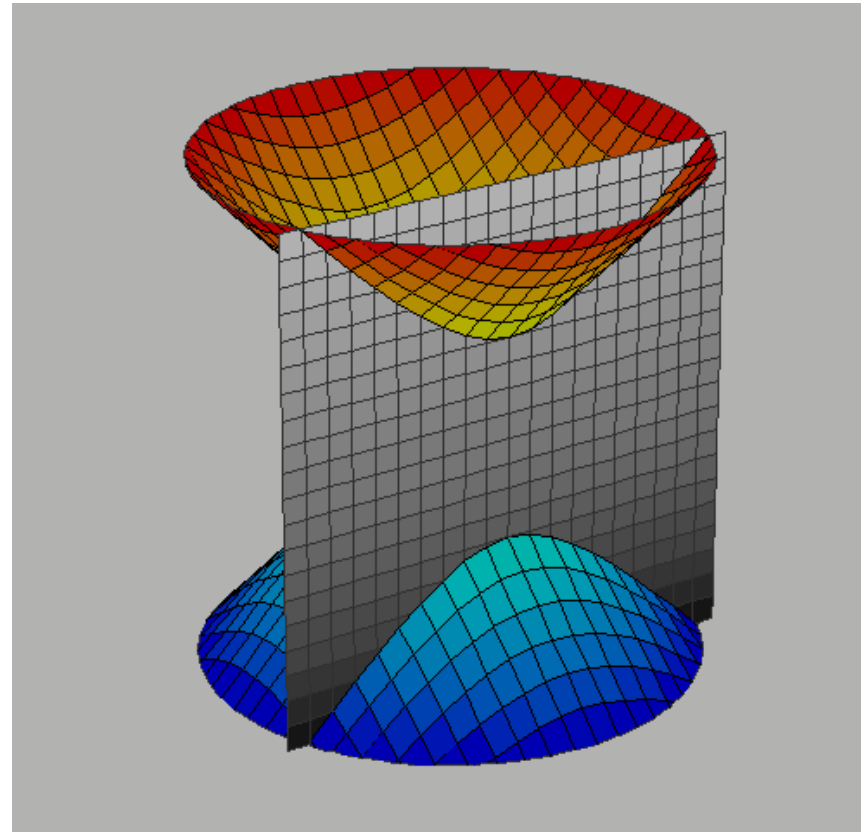
- Si el plano es perpendicular al eje del cono, se obtiene una ***CIRCUNFERENCIA.***



# *HIPERBOLA*

---

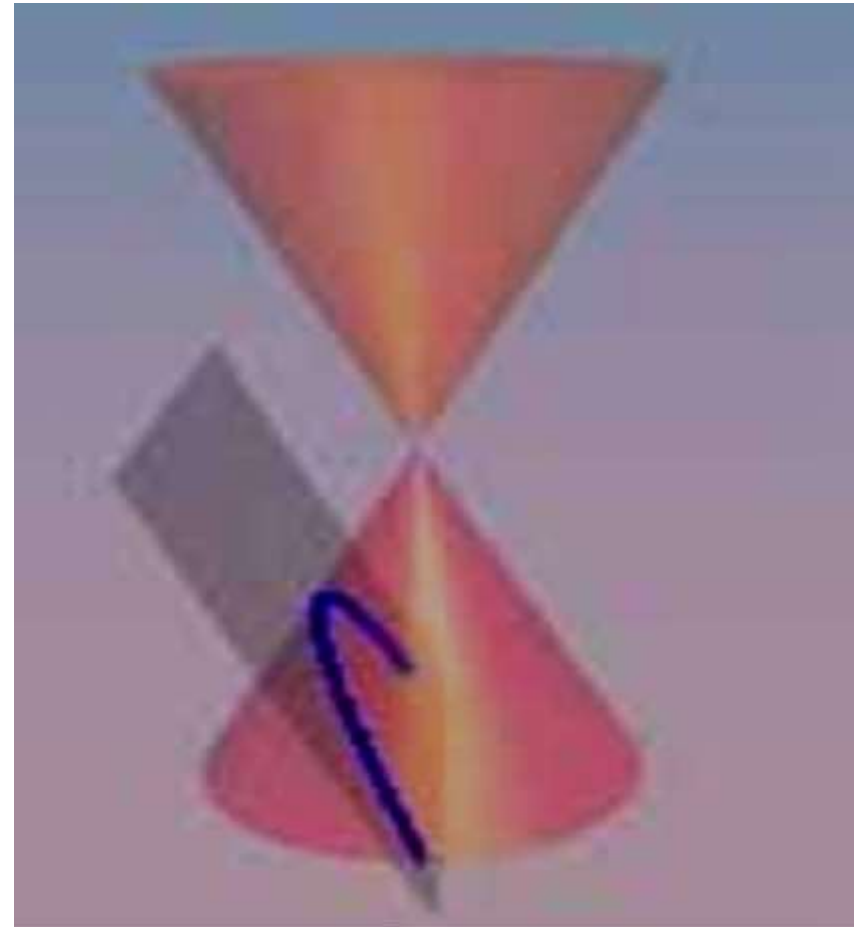
- Si el plano es paralelo al eje del cono, corta a ambas hojas y forma una sección de dos partes, cada una se extiende indefinidamente a lo largo de la hoja. Esta curva se denomina *HIPÉRBOLA*.



# PARÁBOLA

---

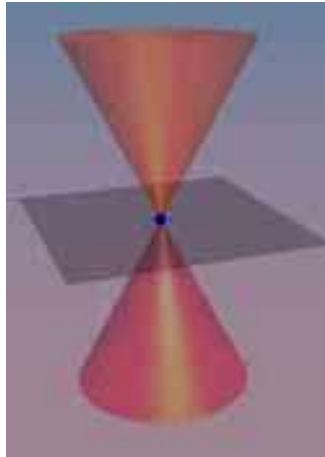
- Si el plano es paralelo a una de las generatrices, la intersección se extiende indefinidamente a lo largo de una hoja, pero no corta a la otra. La curva que se obtiene se denomina *parábola*.



# CONICAS DEGRADADAS

---

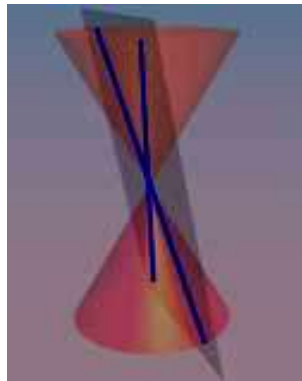
□ **Un punto**



□ **Una recta**



□ **Dos rectas que se cortan en un punto**



---

# CÓNICAS COMO LUGAR GEOMÉTRICO.

# *ELIPSE.*

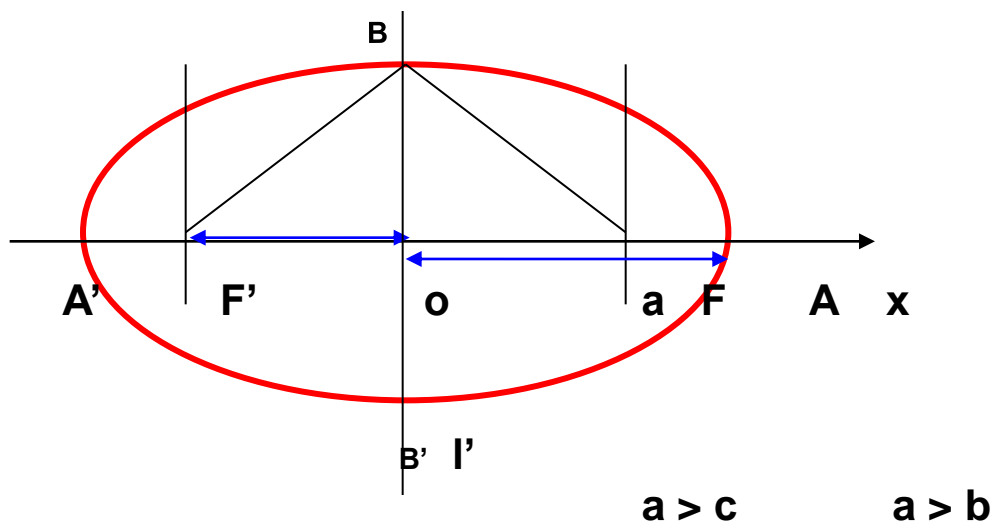
---

□ **UNA ELIPSE ES EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS DEL PLANO TALES QUE LA SUMA DE SUS DISTANCIAS A DOS PUNTOS FIJOS LLAMADOS FOCOS, ES UNA CONSTANTE POSITIVA MAYOR QUE LA DISTANCIA ENTRE ELLOS.**

$$|FP| + |F'P| = K$$

# Elementos

Focos  
Eje mayor  
Centro  
Eje normal  
Eje menor  
Cuerda



Lado recto

Diámetro

Excentricidad:  $e = c/a$ ,  
 $0 < e < 1$

$$a^2 - c^2 = b^2$$

# Elipse. Constantes

**$2a$  = longitud del eje mayor**

**$2b$  = longitud de l eje menor.**

**$2c$  = distancia entre los focos.**

$$b^2 = a^2 - c^2$$

**Focos sobre el eje mayor.**

$$a > b$$

$$a > c$$

**Longitud del lado recto:**  $\frac{2b^2}{a}$

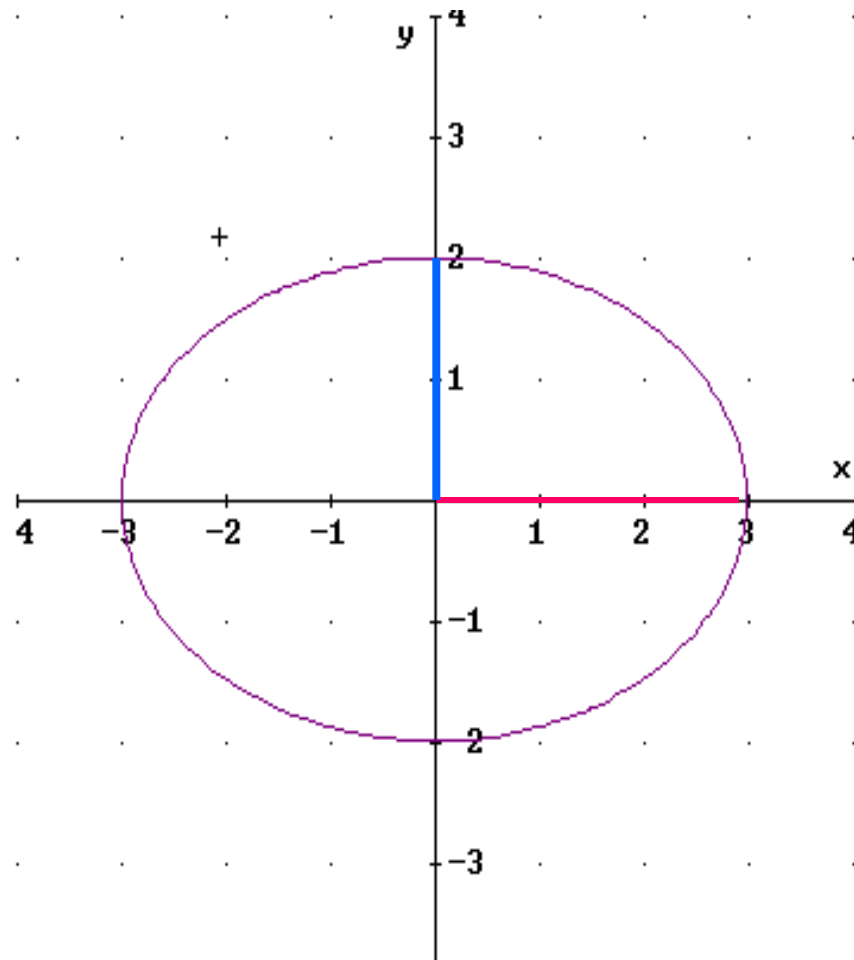
**Excentricidad:  $0 < e = c/a < 1$**



## Primera Ecuación Canónica Centro : ( 0 ; 0 )

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

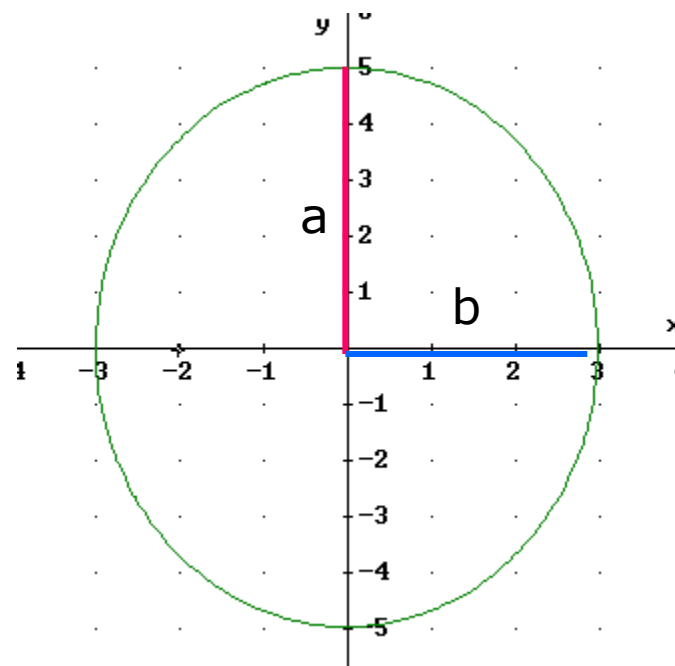
**Focos: (c;0) , (-c;0)**



---

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

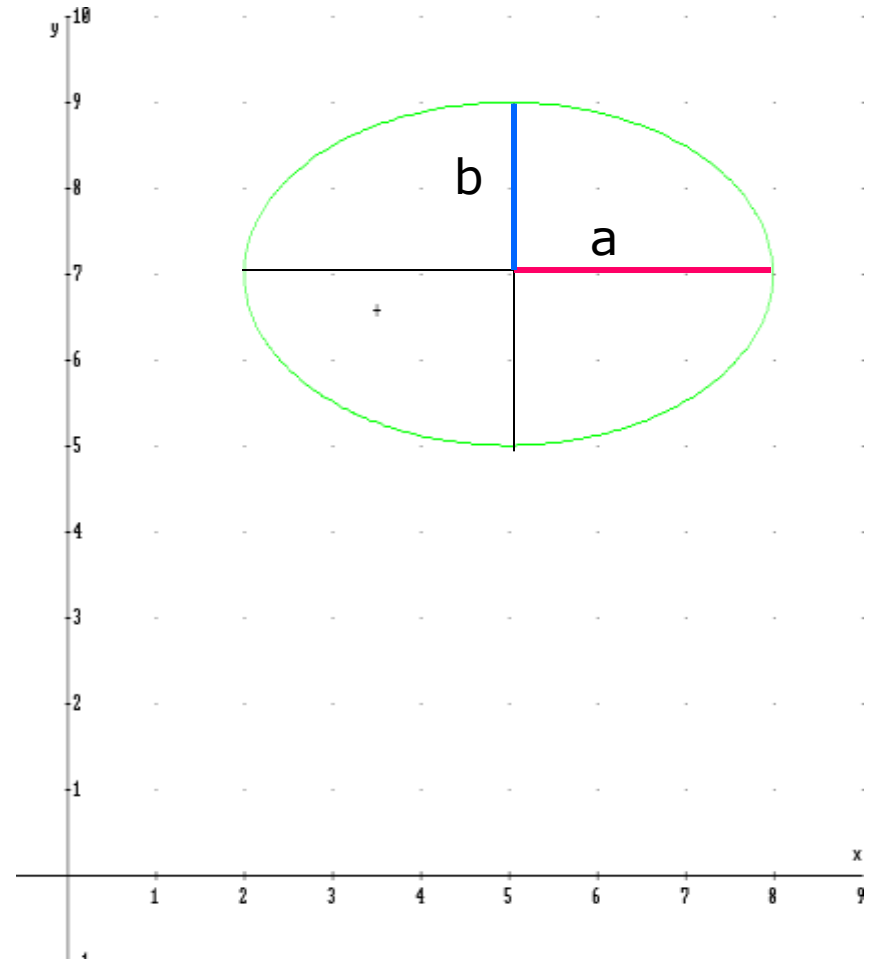
Focos:  $(0; -c)$ ,  $(0; c)$



---

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

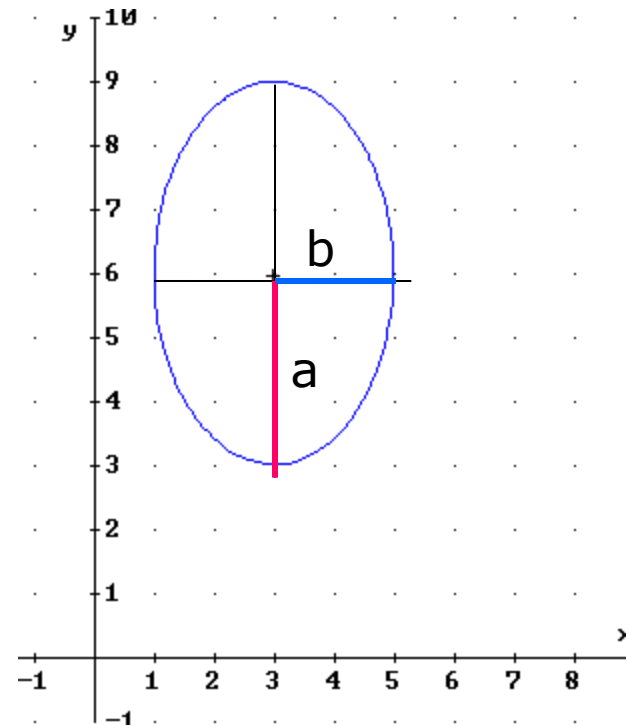
**Focos:  $(h \pm c; k)$**



---

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Focos:  $(h; k \pm a)$



# Para cada elipse:

---

- Escribir las coordenadas del centro, de los focos, de los extremos del eje mayor y de los extremos del eje menor.
- Longitud del eje mayor, longitud eje menor y distancia entre los focos
- Longitud del lado recto
- Excentricidad
- Deducir las condiciones para que la ecuación general de segundo grado represente una elipse con ejes paralelos a los coordenados.
- Pasar de la ecuación general a la ecuación canónica y recíprocamente. Enunciar conclusiones

# Circunferencia

Circunferencia de centro  $c(h;k)$  y radio  $r>0$ : lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a una distancia "r" del punto  $c(h;k)$ .

•NOTACIÓN:  $C(c, r)$

•ELEMENTOS.

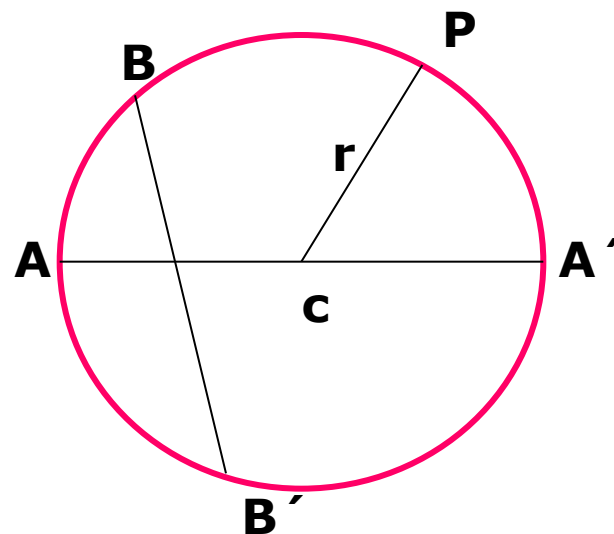
$C(h, k)$ : Centro de la circunferencia.

$r = |CP|$ : Radio

$BB'$  : Cuerda

$AA'$  : Diámetro  $|AA'| = 2r$

$$\langle \overrightarrow{cp}; \overrightarrow{cp} \rangle = r^2$$



# Ecuación General de la cónica de ejes paralelos a los coordenados

---

$$\square Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

**A y C del mismo signo**

$$\mathbf{B=0}$$

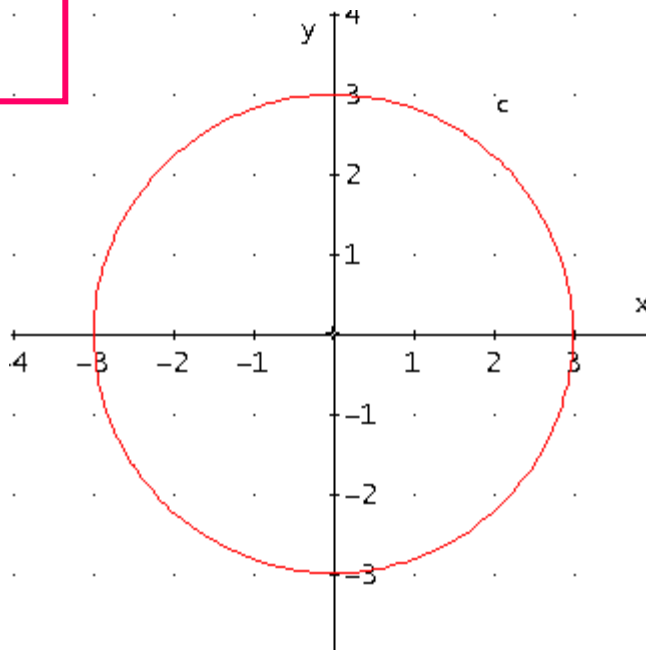
$$\mathbf{|A| \neq |C|}$$

# Ecuaciones

---

- Circunferencia de centro  $C(0;0)$  y radio  $r$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

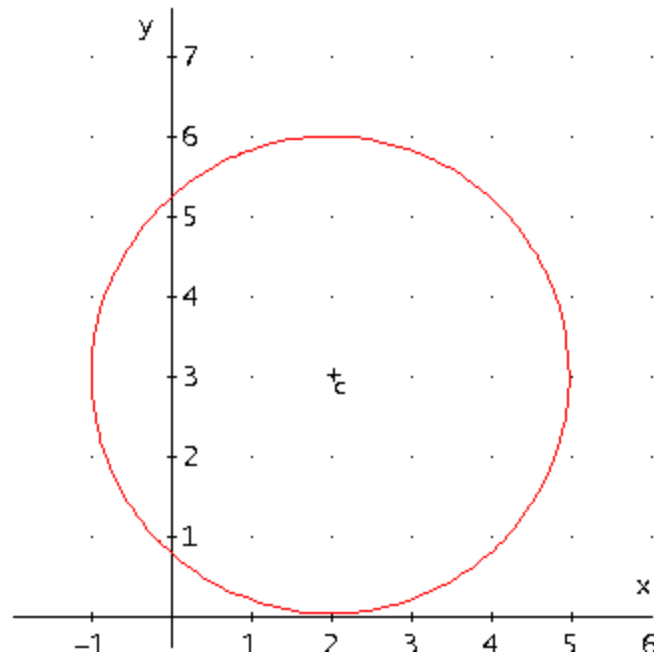




## Circunferencia de centro $C(h;k)$ y radio $r$ .

---

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



# Para cada circunferencia

---

- Escribir las coordenadas del centro
- Deducir las condiciones para que la ecuación general de segundo grado represente una circunferencia con ejes paralelos a los coordenados.
- Pasar de la ecuación general a la ecuación canónica y recíprocamente. Enunciar conclusiones

# ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN X E Y: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

---

□  $A = C$

□  $B = 0$

□  $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$

□  $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Si  $A = C = 1$

□  $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$

□  $m = -2h$        $n = -2k$        $p = h^2 + k^2 - r^2$

# Ejercicio


---

- Escriba las ecuaciones cartesianas y generales de las circunferencias dadas.
- Escriba la ecuación cartesiana y la general de las circunferencias de radio 3 y que sean:
  - A) Tangente al eje de abscisas
  - B) Tangente al eje de ordenadas
  - C) Tangente a ambos ejes coordenadas

# Hipérbola

---

- Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la DIFERENCIA de sus distancias a dos puntos fijos llamados FOCOS es una CONSTANTE POSITIVA Y MENOR QUE LA DISTANCIA ENTRE ELLOS

 Ecuación Vectorial

$$||\mathbf{FP}|| - ||\mathbf{F'P}|| = \mathbf{K} ; k = 2a$$

# Elementos

Focos:  $F$  y  $F'$

Eje Focal

Vértices

Eje Transverso

Centro

Eje Normal

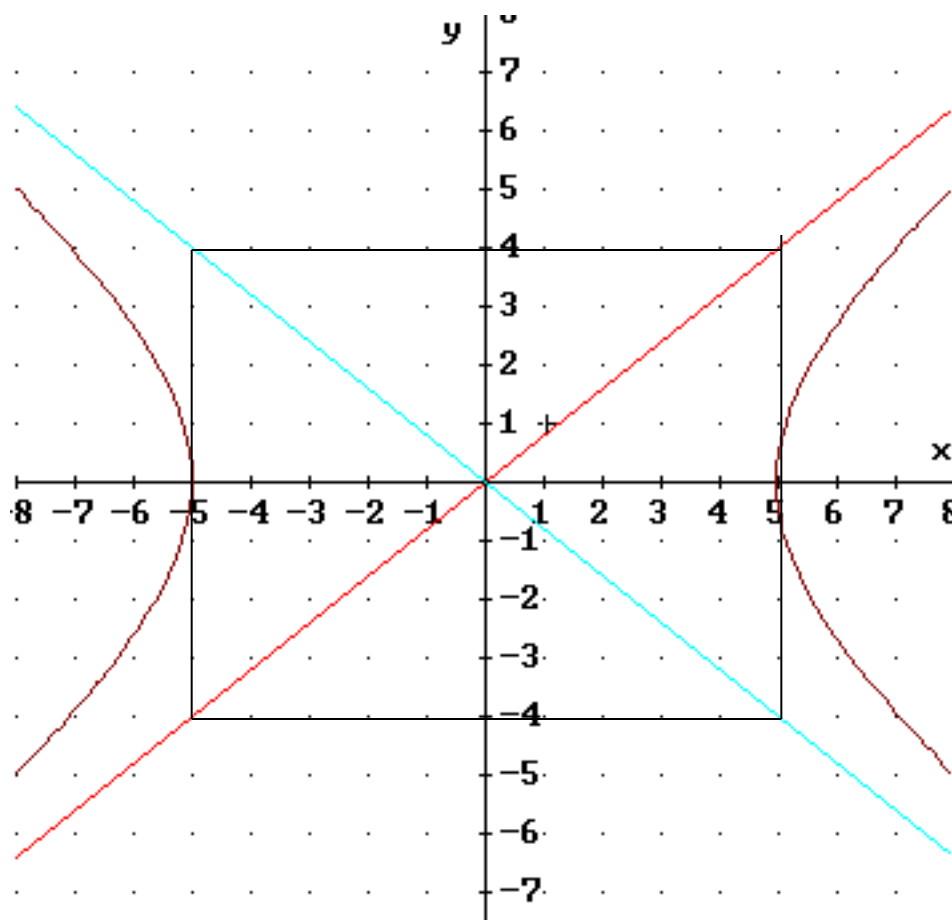
Eje Imaginario

Cuerda

Lado recto

Diámetro

Asíntotas



# Elementos

---

**2a= longitud del eje transverso**

**2b= longitud del eje imaginario**

**2c= distancia entre los focos.**

$$b^2 = c^2 - a^2$$

**Focos sobre el eje transverso**

$$a < c$$

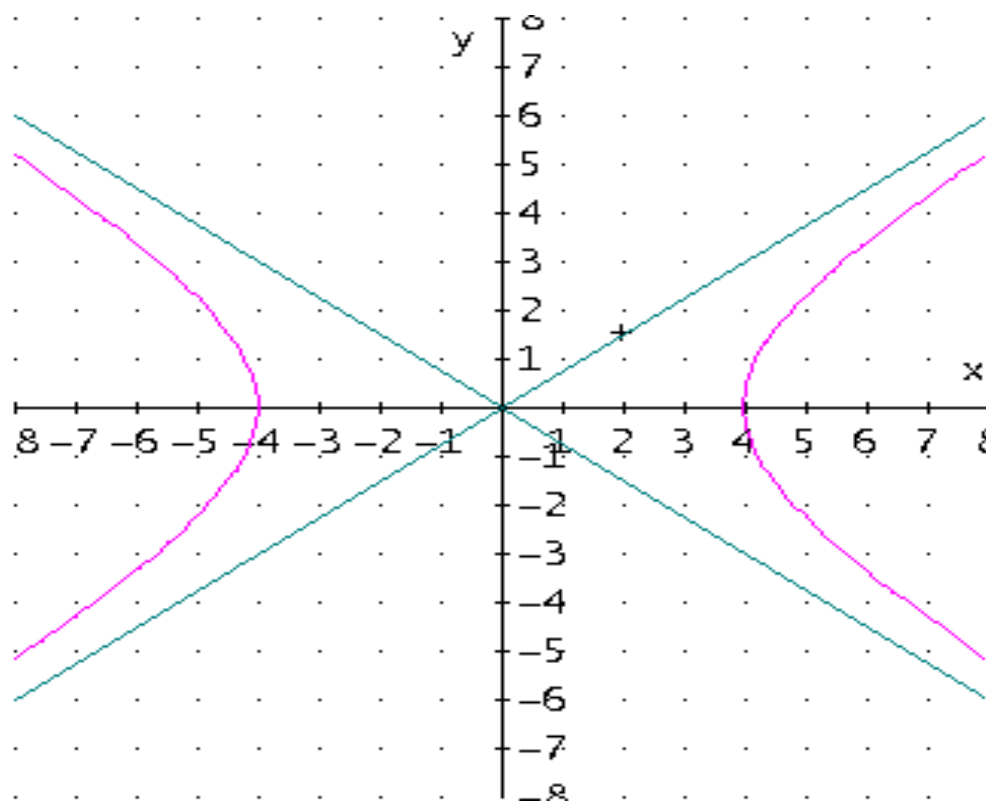
**Longitud del lado recto:**  $\frac{2b^2}{a}$

**Excentricidad:  $e = c/a > 1$**

# Ecuaciones

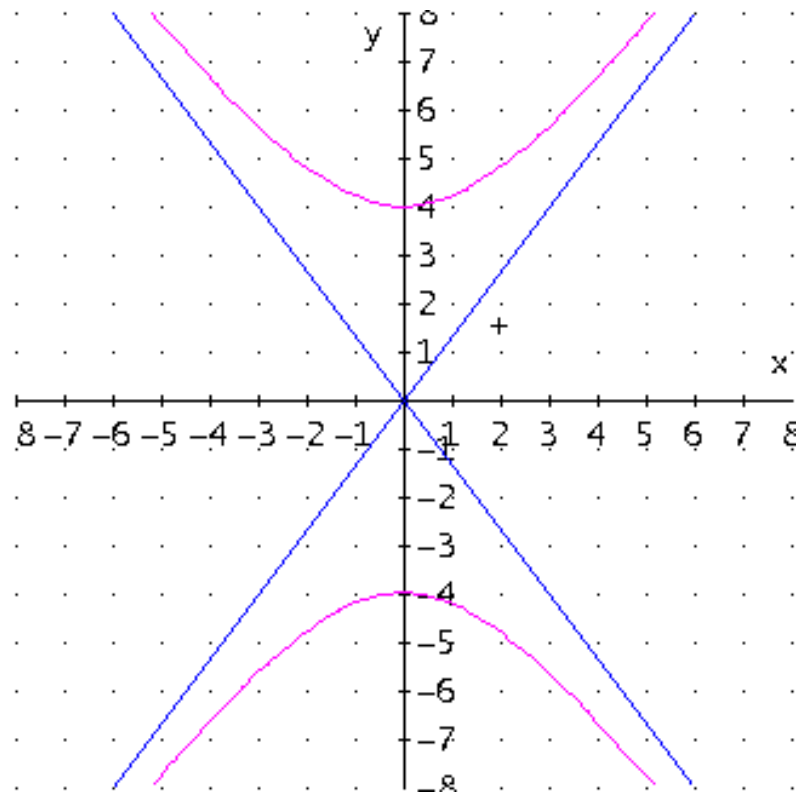
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Asíntotas:**  $y = \pm \frac{b}{a}x$





$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



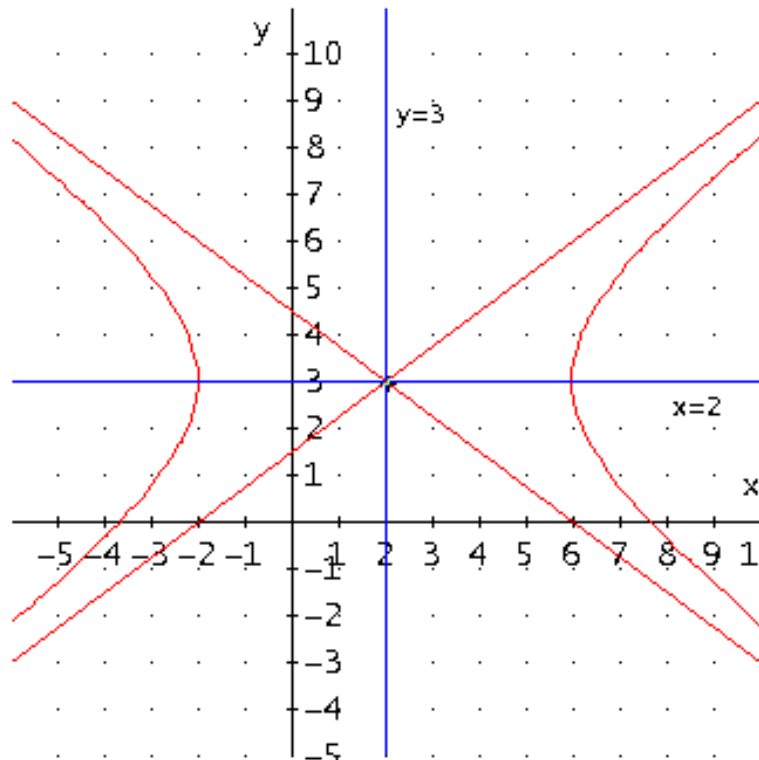
**Asíntotas:**

$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

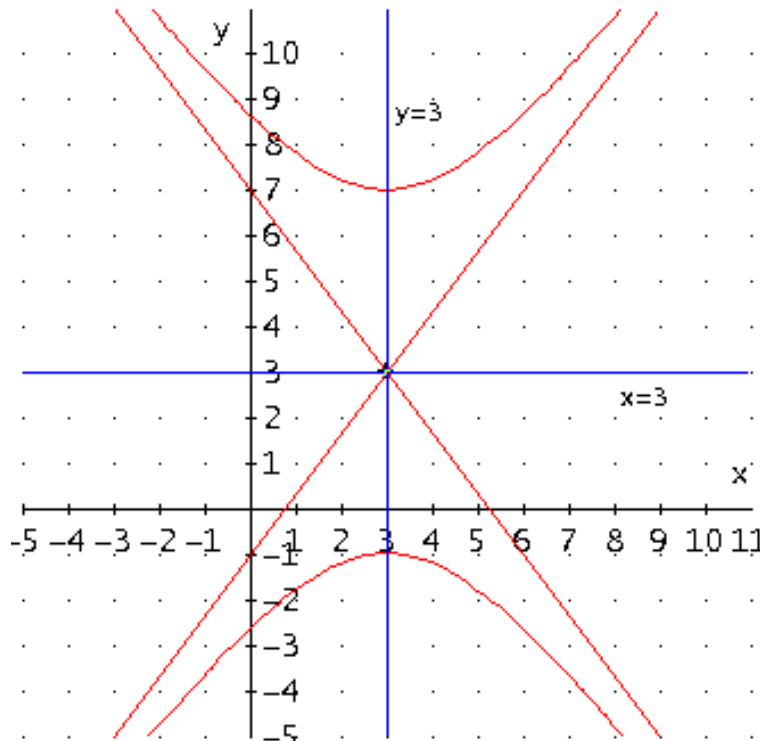
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

**Asíntotas:**

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



**Asíntotas:**

$$y - k = \pm \frac{a}{b} (x - h)$$

# Para cada hipérbola

---

- ❑ Escribir las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices.
- ❑ Longitud del eje transverso, longitud eje imaginario y distancia entre los focos
- ❑ Longitud del lado recto
- ❑ Excentricidad
- ❑ Deducir las condiciones para que la ecuación general de segundo grado represente una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados.
- ❑ Pasar de la ecuación general a la ecuación canónica y recíprocamente. Enunciar conclusiones

# Ecuación General de la cónica de ejes paralelos a los coordenados

---

□  **$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$**

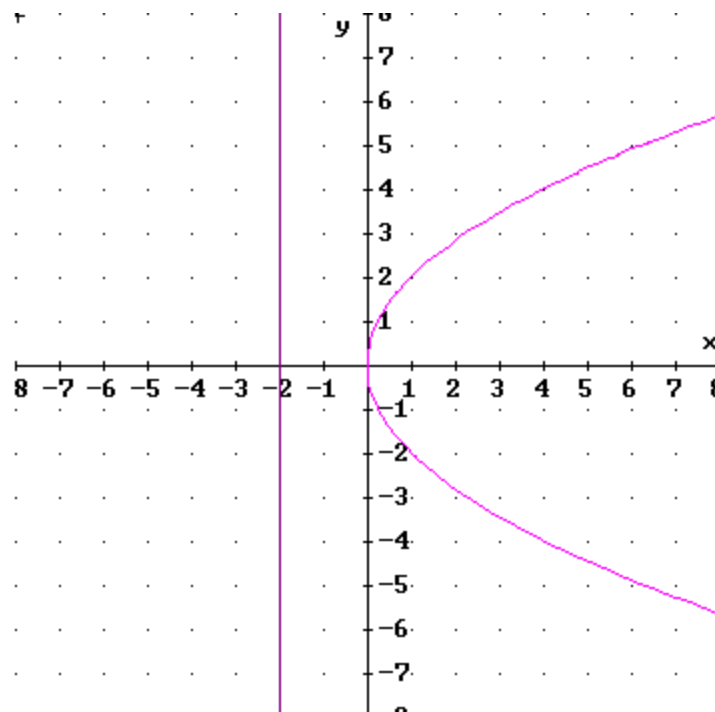
**A y C de distinto signo**

**$B = 0$**

# Parábola

- Una parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que sus distancias a una recta fija situada en el plano es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta.
- Recta fija: directriz
- Punto fijo: foco
- Ecuación vectorial

$$|PA| = |PF|$$



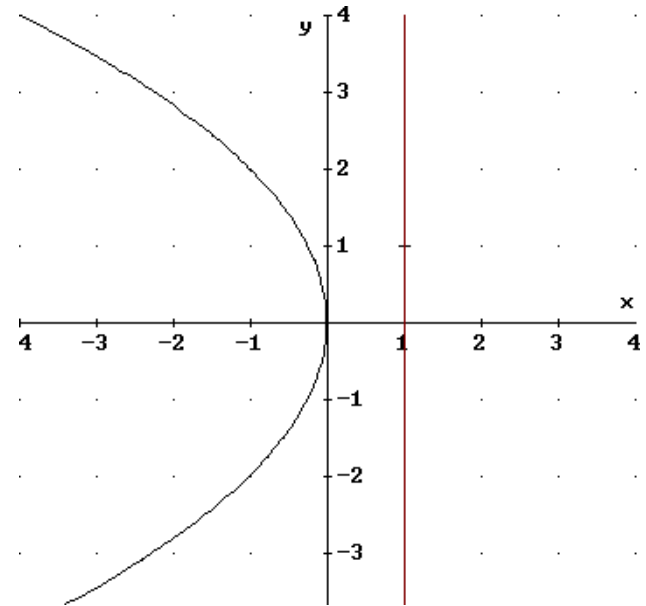
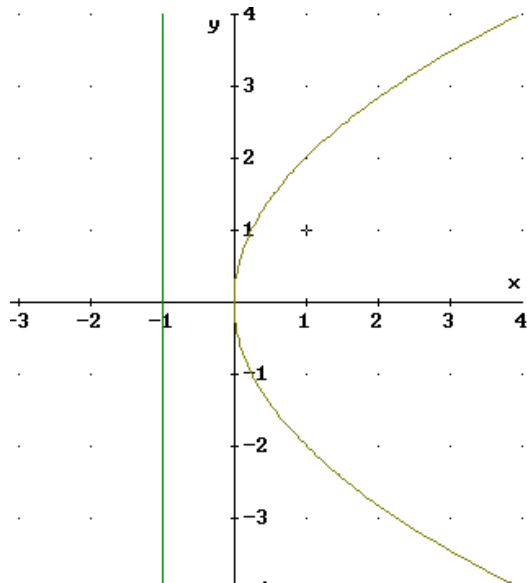
# Constantes

---

- **$p =$  distancia del foco a la directriz**
- **$p/2 =$  distancia del vértice al foco =  
= distancia del vértice a la directriz.**
- **Foco sobre el eje de la parábola**

# Eje de la parábola coincidente con el eje x

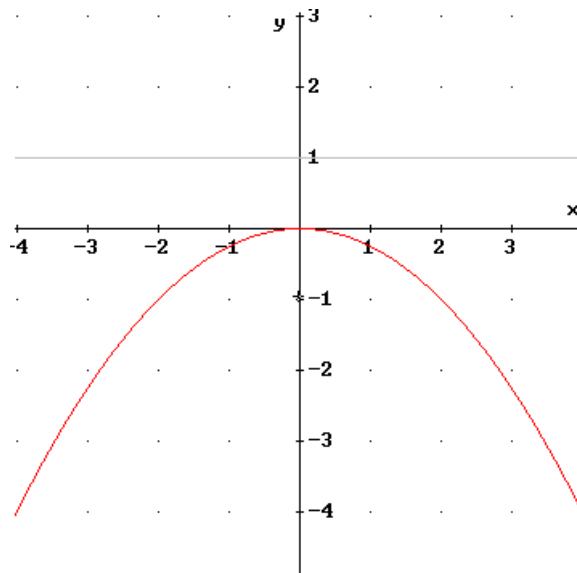
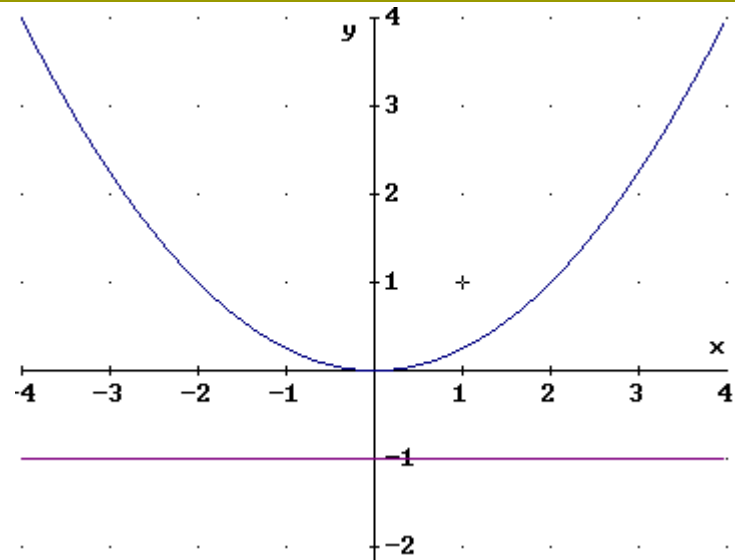
- Ecuación:  $y^2 = \pm 2px$
- Vértice:  $(0;0)$
- Directriz:  $x = \mp \frac{p}{2}$
- Foco:  $(\pm p/2 ; 0)$





# Eje de la parábola coincidente con el eje y

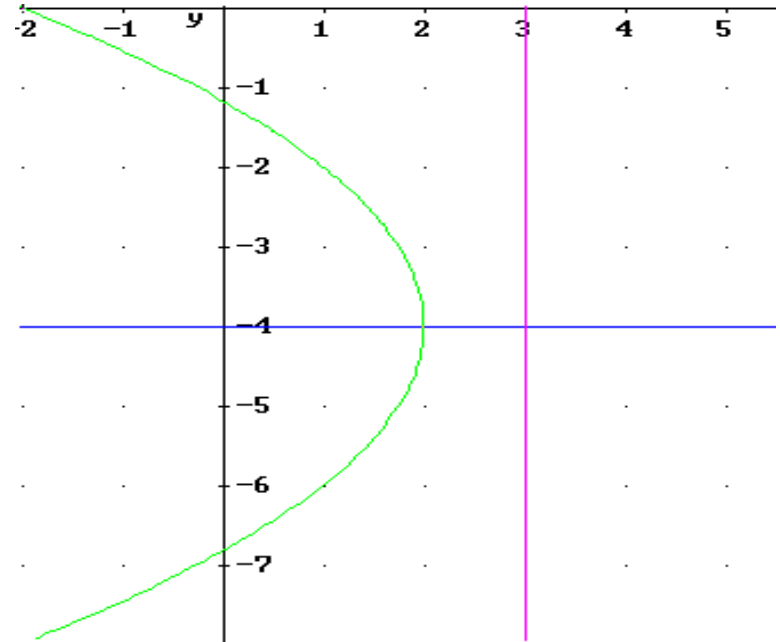
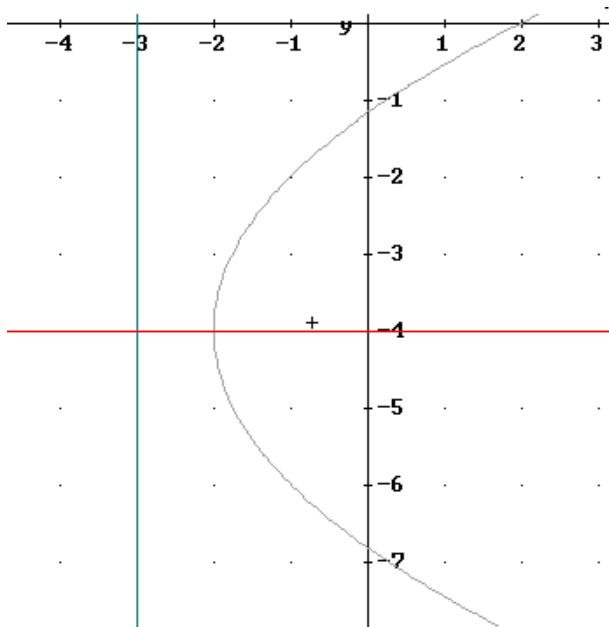
- Ecuación:  $x^2 = \pm 2py$
- Vértice:  $(0;0)$
- Directriz:  $y = \mp \frac{p}{2}$
- Foco:  $(0; \pm p/2)$



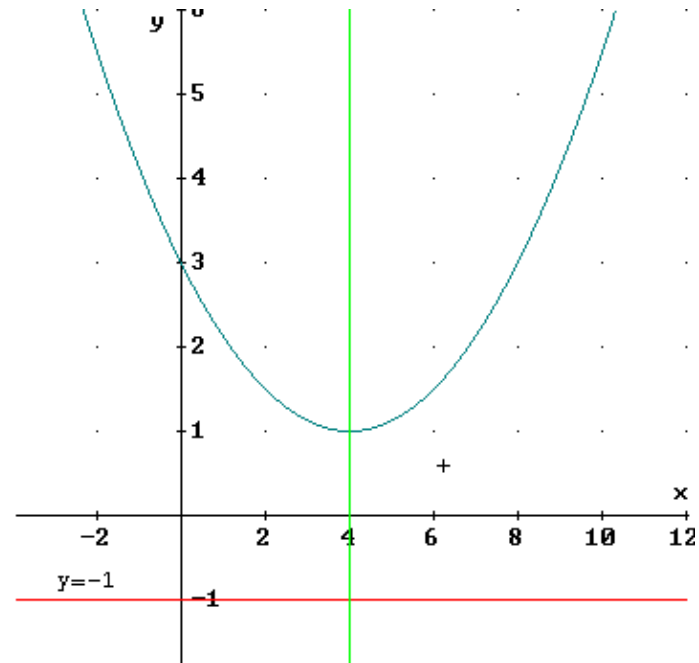
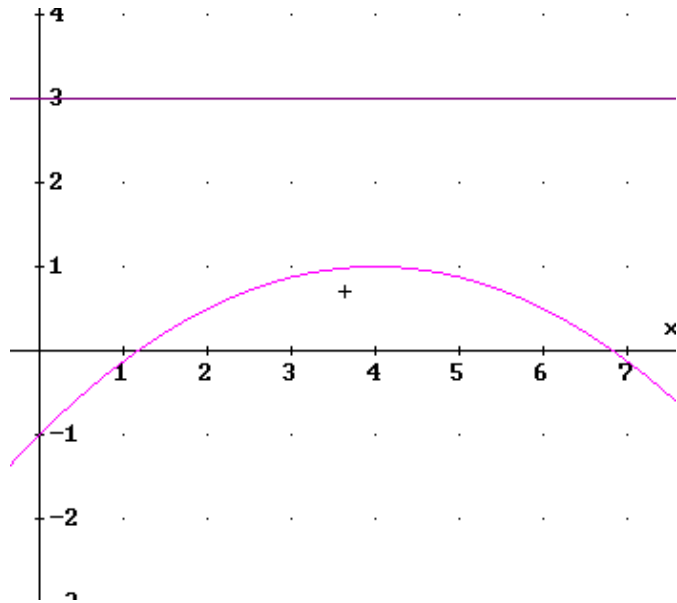
# Eje de la parábola paralelo al eje x

$$(y - k)^2 = \pm 2p(x - h)$$

**Vértice : (h;k)**  
 $x = h \mp \frac{p}{2}$



# Eje de la parábola paralelo al eje y



$$(x - h)^2 = \pm 2p(y - k)$$

# Para cada parábola

---

- Escribir las coordenadas del vértice, del foco.
- Longitud del lado recto
- Excentricidad
- Deducir las condiciones para que la ecuación general de segundo grado represente una parábola con ejes paralelos a los coordenados.
- Pasar de la ecuación general a la ecuación canónica y recíprocamente. Enunciar conclusiones