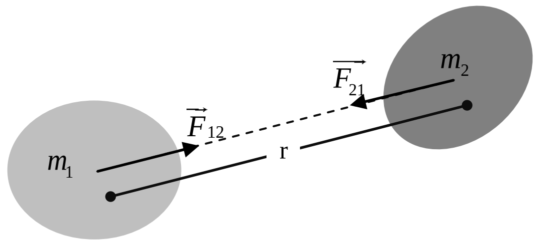
2. GEODESIA FÍSICA

2.1. FINALIDAD Y APLICACIONES

La finalidad práctica de la Geodesia es establecer con la mayor precisión posible la posición de los puntos sobre la Tierra.
Por lo que se verá, adquiere fundamental importancia conocer la forma y dimensiones del planeta, pero en realidad no es la finalidad última de la materia sino una verdadera necesidad.
Por eso hoy en día, en que con la ayuda de los satélites la forma y dimensión han sido establecidas con gran precisión, la geodesia no agota su investigación y prosigue elaborando nuevas técnicas cada vez más precisas para determinar la ubicación de los puntos sobre la superficie terrestre.

2.2. LEY UNIVERSAL DE GRAVITACIÓN

La ***Gravedad*** es una de la cuatro fuerzas, que según el estado actual de desarrollo de la Ciencia, gobiernan el mundo físico. Las otras tres fuerzas son: el electromagnetismo, la acción débil y la acción fuerte.
Los conceptos que con fundamento en la Mecánica Clásica describen el comportamiento de la ***Gravedad***, fueron desarrollados por Newton en el S. XVIII, como resultado del análisis de las Leyes de Kepler del movimiento de los astros. Todo ello sin incursionar en la naturaleza de la atracción entre las masas propiamente dicha, ni en los mecanismos de la transmisión en el espacio de la acción gravitacional.
La atracción gravitacional es parte de la experiencia cotidiana. Sus variaciones espaciales, por otra parte, son fuente de información sobre la distribución de masas en el interior de la Tierra.
La ***Ley Universal de Gravitación***, postulada por Newton (deducida luego de conocida las leyes de Kepler) expresa:
*"**todo pasa como si** dos partículas materiales se atrajeran con una fuerza de dirección coincidente con la de la recta que las une, de intensidad directamente proporcional al producto de sus masas en inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa"*



$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{21}\right| = F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Figura 1: Fuerza de Gravedad

- F = fuerza de atracción actuante entre la masas m_1 y m_2, separadas de la distancia r
- G: Constante universal de gravitación. Se define como G = 6,67 . 10^{-11} N.m^2.kg^{-2} [unidad de fuerza por unidad de superficie sobre unidad de masa], ó bien
  G =(6.672,59 ± 0,30).10^{-14} m^3.seg^{-2}.kg^{-1}, (tal como fue definida en 1999 por la Unión Geodésica y Geofísica Internacional, IUGG).

El campo gravitacional se define en función de la fuerza actuante en cada punto sobre la unidad de masa, de modo que la intensidad del campo generado por una masa esférica "m" en una masa unitaria a la distancia "r", viene dada por la expresión $F = G\frac{m}{r^2}\left[N\right]$.
La ecuación de campo es válida también para cuerpos constituidos por cáscaras esféricas de densidad uniforme , siendo entonces la distancia la que separa el punto del centro de masa de las esferas.

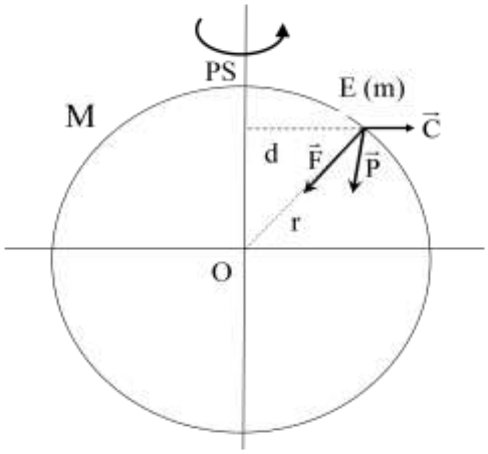


Figura 2: Campo de Gravedad

Supongamos sobre el punto E una masa puntual unitaria “m” y como hipótesis “simplificactiva” que la masa terrestre se encuentra concentrada en el centro “O” de la Tierra.
En E aparecerá una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia O. Según la Ley de Newton, el módulo de $\vec{F}$ será:

$$\left|\vec{F}\right| = F \cong \frac{GM}{r^2} \qquad (2.1)$$

donde r es la distancia desde la estación al centro terrestre y d es la distancia de la estación al eje de rotación terrestre.
Por existencia de la masa terrestre, existirá entonces un campo de fuerzas dirigido al centro O que se manifiesta sobre todas las masas colocadas en el espacio exterior a la tierra.

2.3. LAS FORMAS DE LA TIERRA

Se ha visto en Geodesia Geométrica el procedimiento para la elección de un elipsoide de revolución como sistema representativo de la superficie topográfica; es un modelo geométrico sobre el cual la geodesia realiza sus cálculos.
La forma real de la Tierra es la resultante de la materia que la compone y de las fuerzas a la que está sometida. Esta materia en estado sólido, líquido y gaseoso está irregularmente distribuida. Más aún, existen desplazamientos en la atmósfera, en los mares y en los continentes: la tierra NO es un cuerpo estático.
La Tierra es entonces un cuerpo con forma de esfera achatada en los polos; pero vista más en detalle su superficie es totalmente irregular, y estas irregularidades se deben a la distribución irregular de las masas en su interior.
Asociado a la Tierra existe un campo vectorial, el campo de la ***Gravedad*** que puede ser considerado como un campo de ***fuerzas*** o de ***aceleraciones***. Las primeras se manifiestan a través del peso de los cuerpos y las segundas por su movimiento hacia el centro de la Tierra si están libres.
Por otro lado la tierra está animada de diversos movimientos simultáneos que también tienen influencia en su forma: el movimiento diario de rotación alrededor de su eje, el de traslación que es anual, precesión, nutación, etc. Además la acción atractiva de otros cuerpos como el sol y la luna influyen sobre la masa de la tierra causando deformaciones que pueden ser periódicas o no. Todo ello contribuye y afecta en mayor o menos medida a ese campo de gravedad provocando fuerzas y aceleraciones.
Las acciones más importantes en orden de intensidad decreciente son:

a. La atracción gravitacional newtoniana hacia el centro de la Tierra debido a la masa M de la Tierra
b. Las fuerzas y aceleraciones centrífugas provocadas por el hecho de que la Tierra gira alrededor de su eje.
c. La atracción gravitacional de la luna y el sol, que en forma aparente giran alrededor de la Tierra.

Las dos primeras son las más importantes y su resultante es el campo de gravedad terrestre. La acción de la luna y el sol en casos extremos pueden llegar a ser del orden de 2×10^{-7} de la gravedad y cuando es necesaria se la utiliza como corrección de la misma.

2.4. CAMPO GRAVITACIONAL

1.1.1. ECUACIÓN VECTORIAL DEL CAMPO GRAVITACIONAL

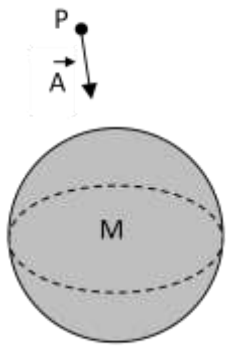


Figura 3: Atracción gravitatoria

En el Punto **P** la masa terrestre **M** produce una aceleración gravitacional $\vec{\mathbf{A}}$ dirigida hacia el centro de la Tierra, que teóricamente podría calcularse integrando las aceleraciones diferenciales $\overrightarrow{\mathbf{dA}}$ producidas por cada elemento diferencial **dm** de la masa terrestre.

Como se vió en (2.1), este elemento de masa, **dm**, provoca en **P** una aceleración elemental $\overrightarrow{\mathbf{dA}}$ que verifica:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{dA}}\right| = \mathrm{dA} = G\frac{dm}{q^2}$$

Como instrumento para estudiar el campo de gravedad, se recurre a un modelo que refiere la Tierra a una terna Cartesiana derecha centrada en su centro de masa, con el eje Z coincidente con el eje de rotación terrestre, sentido positivo hacia el Norte, y el plano X; Y coincidente con el plano Ecuatorial terrestre (ver Figura 4).

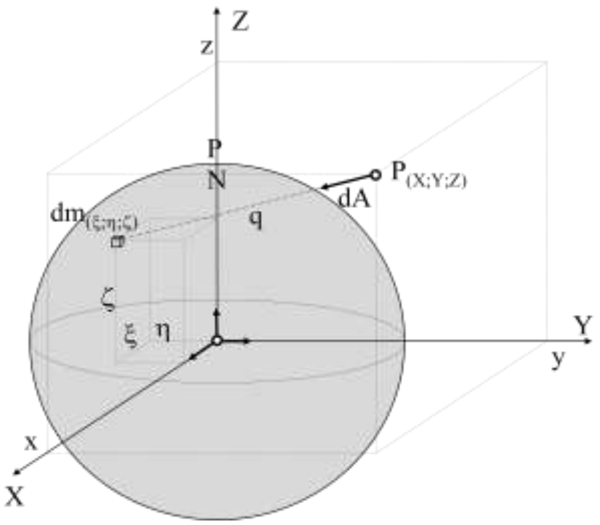


Figura 4: sistema de coordenadas

Para calcular componentes cartesianas de los vectores que se originan introducimos los cosenos directores de **q**:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\xi - X}{q} \\ \cos\beta = \dfrac{\eta - Y}{q} \\ \cos\gamma = \dfrac{\zeta - Z}{q} \end{cases}$$

Luego la primer componente del vector $\overrightarrow{\mathbf{dA}}$ es :

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{dA}}_x\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{dA}}\right|\cos\alpha = G\frac{dm}{q^2}\frac{\xi - X}{q} = -Gdm\frac{X-\xi}{q^3}$$

Por lo que la componente de $\vec{\mathbf{A}}$ en la dirección X resulta:

$$\left|\vec{\mathrm{A}}_x\right| = -G\int_M \frac{X-\xi}{\mathrm{q}^3}\,\mathrm{dm}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, resulta el valor de **A**:

$$\boxed{\vec{A} = -G\int_M \frac{X-\xi}{q^3}\,\mathrm{dm}\;\hat{x} - G\int_M \frac{Y-\eta}{q^3}\,\mathrm{dm}\;\hat{y} - G\int_M \frac{Z-\zeta}{q^3}\,\mathrm{dm}\;\hat{z}} \qquad (2.2)$$

Que se conoce como ***Ecuación Vectorial del Campo Gravitacional***

2.5. CAMPO CENTRÍFUGO

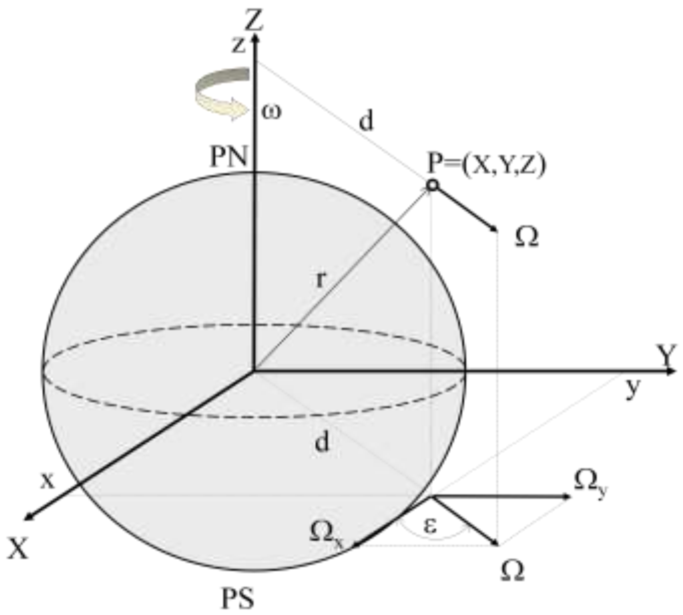


Figura 5: aceleración centrífuga

La Tierra rota con una velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{24\mathrm{h}}$, igual a una vuelta por día sideral. La masa M está sometida a una aceleración centrífuga $\vec{C}$ en dirección perpendicular al eje de rotación terrestre que se manifiesta en aquellas masas que giran con la Tierra, y que según las leyes de la dinámica es

$$\left|\vec{C}\right| = m\omega^2 d \qquad (2.3)$$

$\vec{C}$ es una fuerza ***axífuga***, es decir que se aleja del eje de rotación. En todos los puntos como el de la estación E se pueden componer los dos vectores y la resultante es $\vec{P}$, el peso de la masa m (despreciando la acción de las otras fuerzas menores del Sol y la Luna).

Todo objeto tiene un peso determinado por esta combinación de fuerzas y se denomina campo de gravedad resultante a la suma vectorial en cada punto. Pero ese peso dependerá, en cada caso de la masa m que se esté considerando.

Sabemos que en el vacío, en caída libre y en el mismo lugar, todos los cuerpos realizan el mismo movimiento con las mismas aceleraciones hacia el centro de la Tierra independientemente de su masa. Esto muestra claramente que lo que resulta característico del campo de gravedad no es el peso de las masas sino sus aceleraciones en caída libre que son independientes de las mismas.

2.5.1. ECUACIÓN VECTORIAL DEL CAMPO DE ACELERACION CENTRIFUGA

Los puntos P que participan de la rotación diurna, estarán también sometidos a la aceleración centrífuga $\vec{\Omega}$. El vector $\vec{\Omega}$ es perpendicular al eje de rotación y de sentido "hacia fuera"; además

$$\left|\vec{\Omega}\right| = \left|\overrightarrow{\Omega(P)}\right| = \omega^2 \cdot d$$

donde d es la distancia del punto p al eje de rotación de la tierra y ω es la velocidad angular de rotación terrestre (ver Figura 5).

$$\vec{\Omega}_X = \omega^2 d\cos(\varepsilon)\,\hat{x} = \omega^2 d\,\frac{x}{d}\,\hat{x} = \omega^2 x\,\hat{x}$$

Análogamente $\vec{\Omega}_Y = \omega^2 y\,\hat{y}$, y obviamente $\vec{\Omega}_Z = 0$

Con lo cual, la ecuación que expresa este otro campo vectorial centrífugo será:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \omega^2 x\,\hat{x} + \omega^2 y\,\hat{y}} \tag{2.4}$$

Observación:

Por la Segunda ley de Newton (o Ley de fuerza), sabemos que $\vec{F} = m.\vec{a}$ (masa por aceleración) entonces podemos escribir:

$$F \cong m.\frac{GM}{r^2} = m.A \text{, donde } A = \frac{GM}{r^2} \text{ es la aceleración gravitacional.}$$

$$\left|\vec{C}\right| = C = m.\omega^2 d = m.\Omega \text{, donde } \Omega = \omega^2 d \text{ es la aceleración centrífuga.}$$

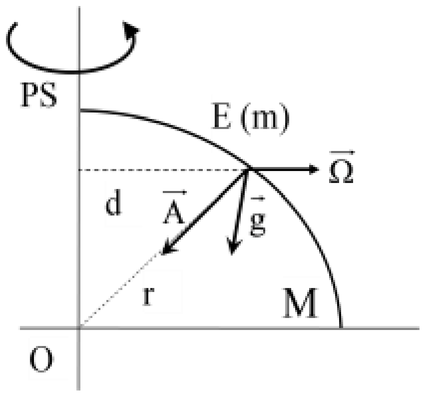


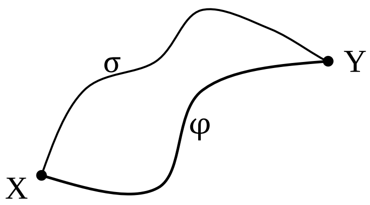
Figura 6: Aceleración de la Gravedad

Como es posible pasar de Fuerzas a Aceleraciones dividiendo por sus masas, entonces en la estación E se tendrá un polígono de aceleraciones semejante al de las fuerzas donde el factor de proporcionalidad es m y la aceleración resultante es ***la aceleración de la gravedad*** $\vec{g}$ (ver Figura 6).

2.6. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DEL POTENCIAL DE LA FUERZA DE GRAVEDAD

2.6.1. EL GEOPOTENCIAL

Como ya se dijo el ***Campo de Gravedad*** se define como la suma de los campos de atracción de la masa terrestre (***campo gravitacional*** $\vec{A}$) y el ***campo centrífugo*** $\vec{\Omega}$ debido a la rotación diurna



Tanto el ***campo gravitacional*** como el ***campo centrífugo*** tienen la propiedad de ser ***conservativos***: esto significa que el trabajo que se realiza para mover una partícula dentro del campo entre dos puntos es independiente de la trayectoria que se siga, sólo depende de los puntos extremos. Dicho en otros términos:

si φ y σ son dos caminos en el espacio exterior a la tierra que unen los puntos X e Y entonces

$$\int_{\varphi} \vec{A}\,d\varphi = \int_{\sigma} \vec{A}\,d\sigma \quad y \quad \int_{\varphi} \vec{\Omega}\,d\varphi = \int_{\sigma} \vec{\Omega}\,d\sigma$$

Esto permite fijando un punto O definir sendas funciones en el espacio exterior a la tierra que caracterizan al respectivo campo:

$$V(X) = \int_{\sigma} \vec{A}\,d\sigma : \text{ potencial gravitatorio} \qquad Z(X) = \int_{\sigma} \vec{\Omega}\,d\sigma : \text{ potencial centrífugo}$$

Donde σ es cualquier camino que une O con X.
Obviamente existen infinitas funciones potenciales para un mismo campo, depende de la elección del punto O, pero todas ellas difieren entre sí en una constante. Se suele elegir la que vale cero en el infinito.
Como consecuencia de esto, también se puede afirmar que el ***Campo de Gravedad*** es conservativo (proviene de un potencial); y el potencial del Campo de gravedad o ***Geopotencial*** será $W(X) = V(X) + Z(X)$.
Por razones de comodidad en los cálculos se toma el punto O en el infinito y se define el potencial del campo de gravedad en un punto X como el trabajo requerido para desplazar una unidad de masa dentro de un campo desde el infinito hasta el punto X. En consecuencia:

$$\lim_{X \to \infty} W(X) = 0$$

2.6.2. POTENCIAL GRAVITACIONAL

En el espacio que es asiento del campo está definida una función escalar $V = V_{(X,Y,Z)}$, denominada potencial del campo $\vec{A}$ tal que $\overrightarrow{\nabla V} = \vec{A}$ para todo punto del espacio considerado.
El potencial puede ser considerado como el trabajo requerido para desplazar una unidad de masa dentro de un campo gravitatorio.
De la misma manera que la atracción gravitatoria de un cuerpo resulta de sumar todos los aportes de cada **dm**, el mismo razonamiento es válido para la función potencial:
puede definirse $dV = G\dfrac{dm}{q}$ como el ***Potencial gravitacional inducido en el punto P por la masa elemental dm***, de modo que el potencial total será:

$$\boxed{V = G\int_M \frac{dm}{q}} \tag{2.5}$$

Comprobaremos que esta función es efectivamente el ***potencial gravitacional*** en un punto genérico P, es decir que su gradiente es igual a $\vec{\mathbf{A}}$

$$\overrightarrow{\nabla V} = \overrightarrow{\text{grad } V} = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

derivando parcialmente V respecto de x:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = G\int_M \left(\frac{-1}{q^2}\right)\frac{\partial q}{\partial X}\,dm = -G\int_M \frac{1}{q^2}\frac{\partial q}{\partial X}\,dm$$

Pero $q^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$ por ser diagonal del paralelepípedo rectángulo.
Derivando respecto de x tenemos:

$$2q\frac{\partial q}{\partial X} = 2(x-\xi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial q}{\partial X} = \frac{x-\xi}{q}$$

Reemplazando en la última integral:

$$\frac{\partial V}{\partial X} = -G\int_M \frac{x-\xi}{q^3}dm = \vec{A}_X$$

De la misma manera, derivando respecto de las otras dos variables, obtenemos:

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = -G\int_M \frac{y-\eta}{q^3}\,dm = \vec{A}_Y \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = -G\int_M \frac{z-\zeta}{q^3}\,dm = \vec{A}_Z$$

Con lo que queda demostrado que grad V = $\vec{\mathbf{A}}$, y que consecuentemente V es la función potencial del campo gravitacional.

2.6.3. POTENCIAL CENTRIFUGO

Se demuestra que el potencial del campo centrífugo vale:

$$Z = \frac{\omega^2}{2}d^2 = \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) \qquad (2.6)$$

Para ello basta verificar que $\vec{\Omega} = \overrightarrow{\nabla Z}$

En consecuencia el ***geopotencial*** resulta de la suma de los potenciales de atracción y centrífugo. La expresión final para el geopotencial será:

$$W(x,y,z) = V + Z = G\int_M \frac{dm}{q} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) \qquad (2.7)$$

Calculando el gradiente de esta última expresión:

$$\vec{g} = \overrightarrow{grad(W)} = \overrightarrow{grad(V)} + \overrightarrow{grad(Z)} = \vec{A} + \vec{\Omega} \qquad (2.8)$$

$\vec{g}$ es lo que se define como el ***campo de gravedad terrestre***

OBSERVACIÓN:

Obsérvese además que tanto en la expresión de la aceleración $\vec{A}$, como en la de su potencial, **V**, aparece la distancia, **q**, en el denominador, lo que impone una importante restricción en la aplicación de estas ecuaciones: son válidas únicamente para puntos exteriores a la Tierra.
En caso contrario, si **P** fuera interior, al efectuar las integraciones la distancia **q** se anularía para **dm** ≡ **P**, con lo que $\vec{A}$ y **V** alcanzaría valores infinitos.

Existe una discontinuidad analítica en las expresiones antes desarrolladas que las hace aplicables únicamente a puntos exteriores, debiendo utilizarse expresiones diferentes en el interior de la Tierra. ***La Geodesia opera sólo con campos exteriores.***

2.7. ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON

2.7.1. EL LAPLACIANO

Se define como ***Laplaciano*** de la función potencial V:

$$\Delta V = \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Observar que $div(\vec{A}) = div\left(\overrightarrow{grad\,(V)}\right) = \nabla\nabla V = \nabla^2 V$, con lo cual el ***Laplaciano*** del Potencial Gravitacional es igual a la ***divergencia*** del Campo de Gravedad.

Operando:

$$\nabla^2 V = \nabla^2 G \int_M \frac{dm}{q} = G \int_M \nabla^2 \left(\frac{1}{q}\right) dm$$

Para calcular el Laplaciano de $\frac{1}{q}$ calculemos sus derivadas segundas:

Las derivadas primeras son:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q^2}\frac{x-\xi}{q}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q^2}\frac{y-\eta}{q}; \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{q^2}\frac{z-\zeta}{q}$$

Las derivadas segundas resultan entonces:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{-q^2 + 3(x-\xi)^2}{q^3} \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{-q^2 + 3(y-\eta)^2}{q^3} \\[2ex] \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{-q^2 + 3(z-\zeta)^2}{q^3} \end{cases}$$

las que sumadas miembro a miembro conducen a:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{-3q^2 + 3\Big[\overbrace{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}^{q^2}\Big]}{q^3} = 0$$

$\boxed{\therefore \text{ El } \textbf{\textit{Laplaciano}} \text{ del potencial gravitacional es } \textbf{\textit{nulo}}.}$

Es decir que se verifica la Ecuación de Laplace: $\Delta V = 0$
Esta igualdad expresa que la divergencia del campo de gravedad es nula, lo que caracteriza al campo de gravedad como ***solenoidal*** y al potencial como una función ***armónica***.

OBSERVACIÓN:

Recuérdese que la divergencia es una magnitud escalar que expresa el límite del cociente entre el flujo emanado de una superficie **S** cerrada y el volumen contenido cuando este tiende a cero:

$$div\left(\vec{A}\right) = \lim_{V \to 0} \frac{\int_S \vec{A}\, dS}{\int_V dv} = \frac{d\Phi}{dV}$$

Si v es un volumen exterior a la tierra delimitado por una superficie S, viendo la geometría del campo de gravedad se puede concluir que $\int_S \vec{A}\, dS = 0$, ya que la única "***fuente***" de gravedad es la masa y por lo tanto dentro de v no se genera líneas de fuerza.
En consecuencia $div\left(\vec{A}\right) = \Delta V = 0$ en el espacio exterior a la tierra.
Las soluciones de la ecuación de Laplace $\nabla^2 V = 0$, llamadas funciones armónicas del potencial, proveen el modelo del potencial gravitatorio fuera de los cuerpos (masas).

2.7.2. LA ECUACIÓN DE POISSON

Dentro de las masas se satisface la ecuación de Poison: $\nabla^2 V = -4\pi G\rho$, [***Heiskanen, W.A. and H. Moritz***; *Physical Geodesy*; W.H. Freeman and Company; San Francisco, California; 1967, pg.35].

2.8. TIERRA NORMAL

Como en otros problemas de la física, en ciertos casos es conveniente adoptar un modelo regular y simétrico como referencia de una Tierra real e iregular.
Supongamos que la Tierra fuera fluida, o sea que pudiera adoptar libremente una cierta forma bajo la acción de las fuerzas a la que está sometida. Supongamos además que está aislada en el espacio girando una vuelta por día como la Tierra real, pero a velocidad angular constante.
Estarían entonces sometidos a su propio campo de gravedad los distintos materiales que componen su núcleo, manto y corteza, los cuales se dispondrían de acuerdo con sus densidades desde el centro hacia el espacio exterior en distintas capas limitadas por superficies equipotenciales del campo de la gravedad.
Si la Tierra fuera de densidad constante, o sea de un solo material, la superficie exterior tendría la forma de un elipsoide de revolución, pero por la presencia de distintos materiales, estas superficies de nivel tienen una ecuación mucho más compleja que la geodesia se encarga de estudiar.
A principios de Siglo XX, Helmert denominó ***Esferoide*** a este modelo de Tierra Normal; el ***Esferoide*** es una "Superficie de simetría de revolución y simetría ecuatorial, cuya sección meridiana tiene un radio de curvatura con valor mínimo en el Ecuador y máximo en los polos".
Calculada la ecuación del esferoide normal y colocando tangente al mismo un elipsoide en el ecuador y en los polos, se ha detectado un apartamiento máximo entre amos de 4,3 mts a una latitud de 45° y aunque rigurosamente ambas superficies no coinciden, se considera a la tierra normal limitada por un elipsoide de revolución.

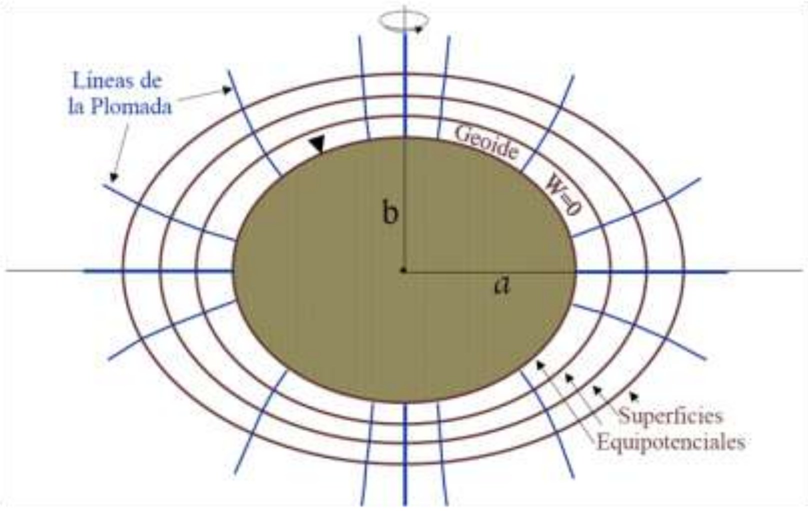


Figura 7: equipotenciales y líneas de fuerza

Existen entonces infinitas superficies equipotenciales, todas ellas esferoidales y concéntricas, que se acercan entre sí en los polos y se alejan en el Ecuador.
Así como tenemos entonces infinitas superficies de nivel concéntricas, tendremos también infinitas líneas de fuerza perpendiculares a las anteriores como aparecen en forma exagerada en la Figura 7.

2.9. TEOREMA DE CLAIRAUT

2.9.1. ESFEROPOTENCIAL

(Expresión de Clairaut para una Tierra normal esferoidal)

Considerando una ***Tierra Normal Esferoidal***, por sus condiciones de simetría axial y ecuatorial en los desarrollos siguientes son posibles las simplificaciones desarrolladas por Clairaut en 1749.
En general, en el estudio de estos campos, es conveniente establecer el potencial correspondiente, que ofrece la simplicidad de tratarse con una función escalar.
En el caso de la Tierra conviene que este potencial esferoidal sea expresado en coordenadas geográficas.
Partamos de las expresiones ya vistas:

$$V = G\int_M \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{q}} \qquad (2.9)$$

$$W = G\int_M \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{q}} + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) \qquad (2.10)$$

2.9.2. ESFEROPOTENCIAL EN COORDENADAS CARTESIANAS

Si observamos el triángulo plano de la Figura 8:

$$\mathrm{q}^2 = \mathrm{r}^2 + \rho^2 - 2\mathrm{r}\rho\, cos(\psi) = \mathrm{r}^2\left[1+\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r}cos(\psi)\right] \Rightarrow \quad q = \mathrm{r}\left[1+\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\mathrm{r}}cos(\psi)\right]^{\frac{1}{2}}$$

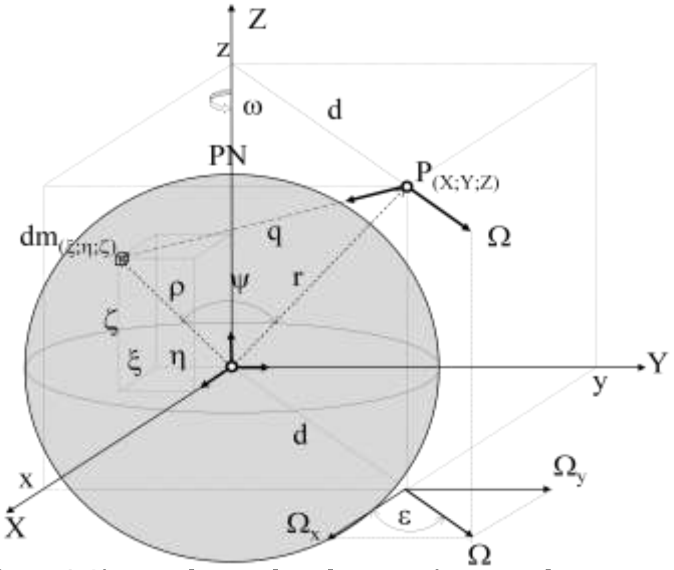


Figura 8:Sistema de coordenadas cartesianas usado como referencia

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}cos(\psi)\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.11)$$

Según la fórmula del ***binomio de Newton generalizada***, si t es un número real cualquiera:

$$(1+\varepsilon)^t=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{t}{k}\varepsilon^k \text{ donde}$$

donde $\binom{t}{k}=\frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-k+1)}{k!}$, y la serie converge si $|\varepsilon|<1$

Aplicando la fórmula de la serie a (2.11) con $\varepsilon=\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)$, resulta:

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\left[1+\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}cos(\psi)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}cos(\psi)\right)^k=$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)^3+\dots\right\}=$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)+\frac{3}{8}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)^2-\frac{5}{16}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)^3+\dots\right\}$$

Desarrollando y asociando los términos que contienen la misma potencia de $\frac{\rho}{r}$ se tiene:

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2+\frac{\rho}{r}\cos(\psi)+\frac{3}{8}\left(\left(\frac{\rho}{r}\right)^4+4\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\cos^2(\psi)-4\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\frac{\rho}{r}\cos(\psi)\right)-\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2+\frac{\rho}{\mathrm{r}}\cos(\psi)+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2\cos^2(\psi)-\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\cos(\psi)+\frac{3}{8}\left(\frac{\rho}{r}\right)^4-\ldots\right] \qquad (2.12)$$

Esta serie infinita converge para todo r > ρ (puntos externos a la masa terrestre); considerando sólo los términos hasta orden 2 , resulta

$$\boxed{\frac{1}{\mathrm{q}}=\frac{1}{\mathrm{r}}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2+\frac{\rho}{\mathrm{r}}\cos(\psi)+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2\cos^2(\psi)\right)} \qquad (2.13)$$

Haciendo el producto escalar: $\vec{\mathrm{r}}\,.\,\vec{\rho}=\mathrm{r}\rho\cos(\psi)=x\xi+y\eta+z\zeta$, de donde:

$$\cos(\psi)=\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}\rho}$$

y sustituyendo en la (2.13)

$$\frac{1}{\mathrm{q}}=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2+\frac{\rho}{\mathrm{r}}\left(\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}\rho}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2\left(\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}\rho}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2\frac{(x\xi+y\eta+z\zeta)^2}{\mathrm{r}^2\rho^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\mathrm{r}}\right)^2\left(\frac{3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2}{\mathrm{r}^2\rho^2}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}^2}+\frac{\rho^2}{2\mathrm{r}^2}\frac{\left(3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2-\mathrm{r}^2\rho^2\right)}{\mathrm{r}^2\rho^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{\mathrm{r}}\left[1+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}^2}+\frac{1}{2\mathrm{r}^4}\left(3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2-\underbrace{\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)}_{\rho^2}\underbrace{\left(x^2+y^2+z^2\right)}_{\mathrm{r}^2}\right)\right]$$

Reemplazando en (2.10):

$$W=G\int_M\frac{1}{\mathrm{r}}\left\{1+\frac{x\xi+y\eta+z\zeta}{\mathrm{r}^2}+\frac{1}{2\mathrm{r}^4}\left[3(x\xi+y\eta+z\zeta)^2-\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\right\}\mathrm{dm}+\frac{\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

Esta expresión finalmente se descompone en una suma de integrales que se simplifica por las siguientes consideraciones, que son válidas cuando suponemos que la tierra tiene forma esferoidal, y que su masa *M* está uniformemente distribuida:

- Los tres ejes de la terna de referencia son baricéntricos, con lo cual los momentos estáticos respecto de cada uno de ellos deben ser nulos, desapareciendo entonces los términos multiplicados por:

$$\int_M \xi \mathrm{dm} = 0; \qquad \int_M \eta \mathrm{dm} = 0; \qquad \int_M \zeta \mathrm{dm} = 0$$

- También son ejes principales de inercia, conforme con las condiciones de simetría establecidas. Los momentos centrífugos, (ó productos de inercia), respecto de cada par de ejes también se anulan, desapareciendo los términos multiplicados por:

$$\int_M \xi\eta \mathrm{dm} = 0; \qquad \int_M \eta\zeta \mathrm{dm} = 0; \qquad \int_M \zeta\xi \mathrm{dm} = 0$$

Al potencial de esta Tierra esferoidal se lo denomina “***Esferopotencial***”, simbolizándoselo con la letra **U**

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\mathrm{r}} G \int_M \mathrm{dm} + \frac{G}{2r^5} \int_M \left[x^2 \left(2\xi^2 - \eta^2 - \zeta \right)^2 - y^2 \left(2\eta^2 - \xi^2 - \zeta^2 \right) + z^2 \left(2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2 \right) \right] \mathrm{dm} + \frac{\omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 \right) \quad (2.14)$$

Los momentos de inercia A; B; C (respecto de los ejes x; y; z, en ese orden), son

$$\begin{cases} A = \int_M l_x^2 \,\mathrm{dm} = \int_M \left(\eta^2 + \zeta^2 \right) \mathrm{dm} \\ B = \int_M l_y^2 \,\mathrm{dm} = \int_M \left(\xi^2 + \zeta^2 \right) \mathrm{dm} \\ C = \int_M l_z^2 \,\mathrm{dm} = \int_M \left(\xi^2 + \eta^2 \right) \mathrm{dm} \end{cases}$$

Tratándose de un cuerpo en revolución: $A = B$. Haciendo las combinaciones lineales:

$$B + C - 2A = A + C - 2A = C - A = \int_M \left(2\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 \right) \mathrm{dm}$$
$$A + C - 2B = A + C - 2A = C - A = \int_M \left(2\eta^2 - \xi^2 + \zeta^2 \right) \mathrm{dm}$$
$$A + B - 2C = A + A - 2C = 2(A - C) = \int_M \left(2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2 \right) \mathrm{dm}$$

Y sustituyendo en la (2.14):

$$U = \frac{1}{\mathrm{r}} GM + \frac{G}{2\mathrm{r}^5} \left[x^2 \left(C - A \right) - y^2 \left(C - A \right) + 2z^2 \left(C - A \right) \right] + \frac{\omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 \right)$$

$$\boxed{\mathrm{U} = \frac{GM}{\mathrm{r}} + \frac{G}{2\mathrm{r}^5} \left(C - A \right) (x^2 + y^2 - 2z^2) + \frac{\omega^2}{2} \left(x^2 + y^2 \right)} \quad (2.15)$$

2.9.3. ESFEROPOTENCIAL EN COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Para obtener una expresión en coordenadas geográficas, se recurre a un sistema de coordenadas esféricas geocéntricas (referidas al centro de la Tierra y a su eje de rotación):

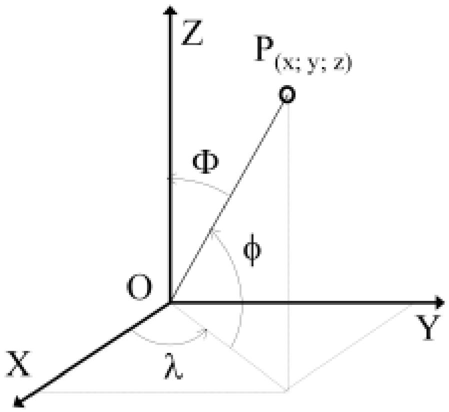


Figura 9: Coordenadas geográficas del punto P

La posición del punto $\mathbf{P}_{(x;\, y;\, z)}$ queda unívocamente definida por sus coordenadas polares geocéntricas:

$$\begin{cases} \lambda = \text{longitud } \left(\text{respecto del meridiano de origen}\right) \\ \phi = \text{latitud geocéntrica (ó } \mathbf{\Phi} = \text{colatitud geocéntrica)} \\ \text{r } = \text{ distancia geocéntrica} \end{cases}$$

Nótese en la Figura 10 la diferencia entre las latitudes Geocéntrica (ϕ) y Geográfica ó Elipsóidica (φ), definida por la Normal a la superficie de Esferoide (ó Elipsoide)

Es inmediato que:

$$\begin{cases} x = r\,sen(\phi)\cos(\lambda) \\ y = r\ sen(\phi)sen(\lambda) \\ z = r\cos(\phi) \end{cases}$$

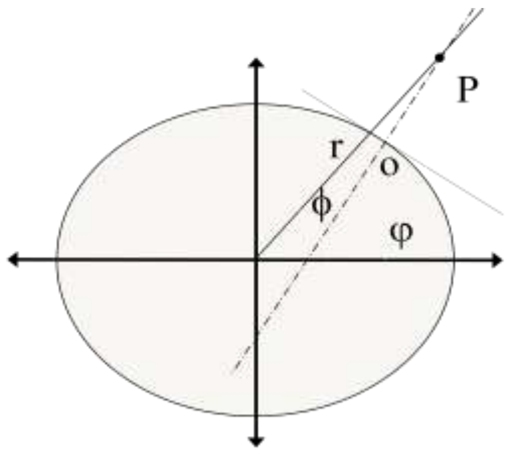


Figura 10: dirección normal al elipsoide.

Reemplazando en (2.15):

$$\mathrm{U} = \frac{GM}{\mathrm{r}} + \frac{G}{2\mathrm{r}^5}\left(C-A\right)(x^2+y^2-2z^2) + \frac{\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right) =$$

$$= \frac{GM}{r} + G\frac{\left(C-A\right)}{2r^5}(r^2\cos^2\left(\phi\right) - 2r^2 sen^2\left(\phi\right)) + \frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\left(\phi\right)$$

Haciendo sustituciones y simplificando, se llega a:

$$\boxed{\mathbf{U} = \underbrace{\overbrace{\frac{GM}{r}}^{}}_{\text{tierra esférica}} \overbrace{+\underbrace{G\frac{C-A}{2r^3}(1-3sen^2\left(\phi\right))}_{\text{achatamiento}}}^{\text{masa}} + \overbrace{\frac{\omega^2}{2}r^2\cos^2\left(\phi\right)}^{\text{rotación}}} \qquad (2.16)$$

La expresión se debe a Clairaut, y corresponde a un modelo analítico de Tierra Ideal, de masa uniforme, homogénea e isótropa rotando con velocidad angular constante.
Mediante algunas simplificaciones se alcanza esta expresión del Esferopotencial como modelo matemático del "***Potencial Normal***". Obsérvese que la expresión es independiente de la longitud (λ); vale decir: presenta simetría de rotación. Las superficies equipotenciales tendrán también simetría de revolución.

El ***Esferopotencial*** es también ***simétrico respecto del plano del Ecuador***, ya que $\mathbf{U}(\phi)$ es siempre igual a $\mathbf{U}(-\phi)$.
Si la Tierra fuera esférica, el momento de inercia respecto del eje polar, coincidiría con el de un eje ecuatorial: $C = A$, con lo que desaparecería el segundo término indicativo del achatamiento, y el potencial de gravitación a distancia $\mathbf{r}$ resultaría ser $\frac{GM}{\mathrm{r}}$, como si toda la masa se hallara concentrada en el centro de la Tierra.

2.9.4. FORMULAS DE CLAIRAUT PARA LA GRAVEDAD NORMAL

En 1738, buscando una expresión "aproximada" de ***la gravedad normal*** $\vec{\boldsymbol{\gamma}}_{\mathbf{0}}$ sobre la superficie del "***esferoide normal***", Clairaut halló las relaciones entre la geometría de la Tierra y su campo de gravedad, siguiendo una secuencia de análisis como la que siguiente:

- **a)** Obtención de una expresión *aproximada* de la gravedad en las cercanías del esferoide terrestre.
- **b)** Obtención de la expresión *aproximada* del radio geocéntrico del esferoide.
- **c)** Expresión *aproximada* de la gravedad sobre la superficie del esferoide.

a) Considerando la Tierra como de forma esferoidal normal (pequeño achatamiento), la (2.16) expresa el esferopotencial asociado $\mathbf{U}$.
La ***gravedad (normal)*** en cada punto entonces será entonces $\vec{\boldsymbol{\gamma}} = \overrightarrow{grad\,\mathbf{U}}$
Sabemos que la dirección de $\vec{\gamma}$ es paralela a la dirección normal a la superficie equipotencial $\vec{\eta}$, y que su sentido es hacia el centro del elipsoide. Calculemos su intensidad $\boldsymbol{\gamma} = |\vec{\boldsymbol{\gamma}}| = |\overrightarrow{\nabla\mathbf{U}}|$.

$$\frac{d\mathbf{U}}{d\vec{\eta}} = \overrightarrow{\nabla\mathbf{U}}.\vec{\eta} \quad (\text{producto escalar}); \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{d\mathbf{U}}{d\vec{\eta}}\right| = |\overrightarrow{\nabla\mathbf{U}}||\vec{\eta}|\cos(0) = |\overrightarrow{\nabla\mathbf{U}}| \Rightarrow \boldsymbol{\gamma} = \left|\frac{d\mathbf{U}}{d\vec{\eta}}\right|$$

En la Figura 10 es fácil ver que en una tierra de escaso achatamiento, la normal a la superficie en un punto diverge poco de la dirección del radio geocéntrico **r** correspondiente.

En el caso del esferoide normal, partiendo de la (2.16) como expresión aproximada del esferopotencial puede admitirse:

$$\boldsymbol{\gamma} = |\vec{\boldsymbol{\gamma}}| = \left|\frac{d\mathbf{U}}{d\vec{\mathrm{r}}}\right| = \left|\frac{d\mathbf{U}}{dr}\right|$$

Puede aceptarse también con mínimo error: $\varphi \cong \phi$

Con las anteriores consideraciones se tiene:

$$\left|\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial\mathrm{r}}\right| = \boldsymbol{\gamma} = \left|-\frac{GM}{\mathrm{r}^2} - \frac{3}{2\mathrm{r}^4} G(C-A)(1-3sen^2(\varphi)) + \frac{\omega^2}{2} 2r(1-sen^2(\varphi))\right| =$$

$$= \frac{GM}{\mathrm{r}^2} + \frac{3}{2\mathrm{r}^4} \quad G(C-A)(1-3sen^2(\varphi)) - \omega^2 r(1-sen^2(\varphi)) =$$

$$=\frac{GM}{r^2}\left[1+\frac{3}{2r^2M}(C-A)(1-3sen^2(\varphi))-\frac{\omega^2r^3}{GM}(1-sen^2(\varphi))\right]=$$

$$=\frac{GM}{r^2}\left[1+\frac{3}{2r^2M}(C-A)-\frac{\omega^2r^3}{GM}+sen^2(\varphi)\left(\frac{\omega^2r^3}{GM}-\frac{9}{2}\frac{C-A}{r^2M}\right)\right]$$

Debido a que el achatamiento es pequeño, en la expresión entre corchetes, (que incluye los elementos que describen la *geometría de rotación*), puede adoptarse con precisión razonable: $r \cong a$, con lo que:

$$\gamma=\frac{GM}{r^2}\left[1+\frac{3}{2}\frac{C-A}{Ma^2}-\frac{\omega^2a^3}{GM}+sen^2(\varphi)\left(\frac{\omega^2a^3}{GM}-\frac{9}{2}\frac{C-A}{Ma^2}\right)\right]$$

- $\mathbf{J_2} = \frac{C-A}{Ma^2}$ es un coeficiente adimensional denominado ***Factor Dinámico de Forma*** de la Tierra, (excluyendo la deformación permanente de marea).
- $\mathbf{q} = \frac{\omega^2 a^3}{GM}$ se conoce como ***Coeficiente del Potencial Centrífugo*** de la Tierra, incluida la atmósfera.

$\mathbf{J_2}$ y $\mathbf{q}$ son dos de las constantes fundamentales de la Tierra.

Con esta notación:

$$\boxed{\gamma=\frac{GM}{r^2}\left[1+\frac{3}{2}\mathbf{J_2}-\mathbf{q}+sen^2(\varphi)\left(\mathbf{q}-\frac{9}{2}\mathbf{J_2}\right)\right]} \qquad (2.17)$$

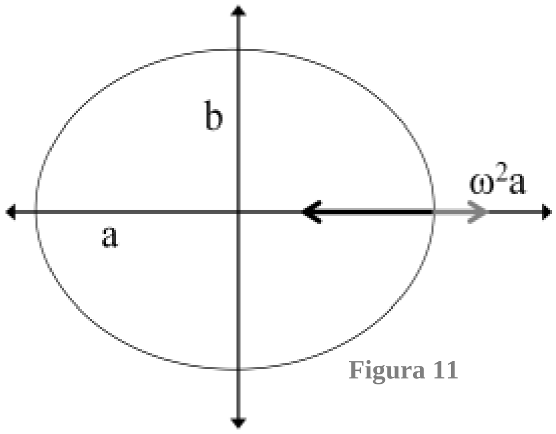


Figura 11

El valor de $\mathbf{q}=\frac{\omega^2 a}{\frac{GM}{a^2}}$ denota el cociente en el Ecuador de la aceleración centrífuga y la aceleración gravitacional, con toda la masa concentrada en el centro de la Tierra.

b) Para obtener una expresión de $\boldsymbol{\gamma}$ sobre el esferoide debe sustituirse r por el valor que adquiere al nivel de esa superficie. Pero también, partiendo de la [6], se puede hallar una expresión analítica aproximada del ***radio geocéntrico del esferoide***:

$$\mathbf{U} = \frac{GM}{\mathrm{r}} + G\frac{C-A}{2\mathrm{r}^3}(1-3sen^2(\phi)) + \frac{\omega^2}{2}\mathrm{r}^2\cos^2(\phi) =$$

$$= \frac{GM}{\mathrm{r}}\left[1 + \frac{(C-A)\left(1-3sen^2(\phi)\right)}{2M\mathrm{r}^2} + \frac{\omega^2\mathrm{r}^3}{2GM}\left(1-sen^2(\phi)\right)\right]$$

Dentro del corchete sustituyendo nuevamente $\mathrm{r} \cong a$ y $\varphi \cong \phi$ con error despreciable, con lo que el ***esferopotencial a nivel del esferoide normal***, denotado como $\mathbf{U_0}$, resultará:

$$\mathbf{U}_0 = \frac{GM}{\mathrm{r}}\left[1 + \frac{(C-A)\left(1-3sen^2(\varphi)\right)}{2Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{2GM}\left(1-sen^2(\varphi)\right)\right] \tag{2.18}$$

Luego:

$$\mathrm{r} = \frac{GM}{\mathbf{U}_0}\left[1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2} - sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right] = \frac{GM}{\mathbf{U}_0}\left(1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\left(1 - sen^2(\varphi)\frac{\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}}{1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2}}\right) =$$

Dado que $\frac{\mathbf{J_2}}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2} \cong 0$ podemos suponer que el denominador dentro del paréntesis es 1, y por lo tanto:

$$\boxed{\mathrm{r} = \frac{GM}{\mathbf{U}_0}\left(1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\left[1 - sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]} \tag{2.19}$$

c) La expresión aproximada (2.19) de r se sustituye en la (2.16) para obtener ***expresión aproximada de la gravedad sobre la superficie del esferoide***:

$$\boldsymbol{\gamma_0} = \frac{GM\left[1 + \frac{3}{2}\mathbf{J_2} - \mathbf{q} + sen^2(\varphi)\left(\mathbf{q} - \frac{9}{2}\mathbf{J_2}\right)\right]}{\frac{G^2M^2}{\mathrm{U}_0^2}\left(1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)^2\left[1 - sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]^2} \tag{2.20}$$

Desarrollando los cuadrados del denominador:

$$\left[1 - sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]^2 = 1 + \underbrace{\left(sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right)^2}_{\text{despreciable}} - 2sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1 - sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]^2 \cong 1 - 2sen^2(\varphi)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right)$$

De la misma manera:

$$\left(1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)^2=1+\underbrace{\left(\frac{\mathbf{J_2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{q}}{2}\right)^2}_{\text{despreciable}}+2\frac{\mathbf{J_2}}{2}+2\frac{\mathbf{q}}{2}\cong 1+2\frac{\mathbf{J_2}}{2}+2\frac{\mathbf{q}}{2}=\left(1+\mathbf{J_2}+\mathbf{q}\right)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas en (2.20) se tiene:

$$\boldsymbol{\gamma_0}=\frac{\mathrm{U}_0^2\left[1+\frac{3}{2}\mathbf{J_2}-\mathbf{q}+sen^2\left(\varphi\right)\left(\mathbf{q}-\frac{9}{2}\mathbf{J_2}\right)\right]}{GM\left(1+\mathbf{J_2}+\mathbf{q}\right)\left[1-2sen^2\left(\varphi\right)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]}=\frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left[1+\frac{\frac{\mathbf{J_2}}{2}-2\mathbf{q}+sen^2\left(\varphi\right)\left(\mathbf{q}-\frac{9}{2}\mathbf{J_2}+3\mathbf{J_2}+\mathbf{q}\right)}{1+\mathbf{J_2}+\mathbf{q}-sen^2\left(\varphi\right)\left(3\mathbf{J_2}+\mathbf{q}\right)}\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left[1+\frac{\frac{\mathbf{J_2}}{2}-2\mathbf{q}+sen^2\left(\varphi\right)\left(2\mathbf{q}-\frac{3}{2}\mathbf{J_2}\right)}{1+\underbrace{\mathbf{J_2}+\mathbf{q}-sen^2\left(\varphi\right)\left(3\mathbf{J_2}+\mathbf{q}\right)}_{\text{despreciable}}}\right]=\frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left[1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}-2\mathbf{q}+sen^2\left(\varphi\right)\left(2\mathbf{q}-\frac{3}{2}\mathbf{J_2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left(1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}-2\mathbf{q}\right)\left(1+sen^2\left(\varphi\right)\frac{2\mathbf{q}-\frac{3}{2}\mathbf{J_2}}{1+\underbrace{\frac{\mathbf{J_2}}{2}-2\mathbf{q}}_{\text{despreciable}}}\right)$$

$$\boxed{\therefore\boldsymbol{\gamma_0}=\frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left(1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}-2\mathbf{q}\right)\left[1+sen^2\left(\varphi\right)\left(2\mathbf{q}-\frac{3}{2}\mathbf{J_2}\right)\right]}\qquad(2.21)$$

2.9.5. TEOREMA DE CLAIRAUT

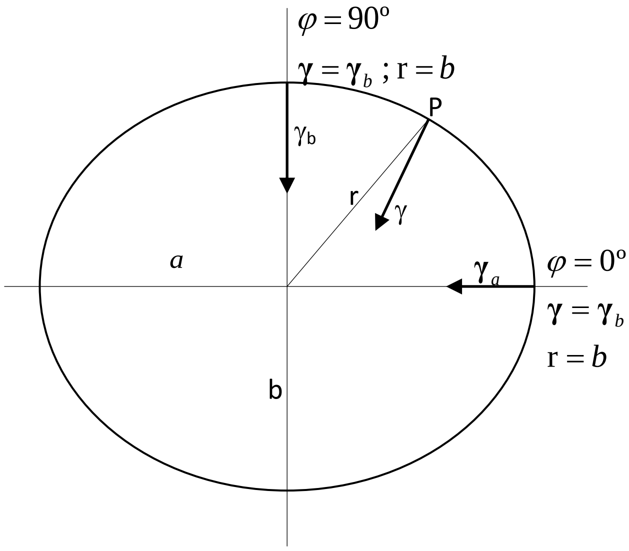


Figura 12

Partiendo de la (2.19):

$$\mathrm{r}=\frac{GM}{\mathbf{U}_0}\left(1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)\left[1-sen^2\left(\varphi\right)\left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)\right]$$

En esta ecuación, cuando $\varphi=0°$, se tiene que $\mathrm{r}=\frac{GM}{\mathbf{U}_0}\left(1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)$; consecuentemente debe ser:

$$\frac{GM}{\mathbf{U}_0}\left(1+\frac{\mathbf{J_2}}{2}+\frac{\mathbf{q}}{2}\right)=a:\text{radio ecuatorial del elipsoide}$$

Llamando $\alpha = \left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2} \right)$ entonces

$$\boxed{\mathrm{r} = a\left(1 - sen^2(\varphi)\alpha\right)}$$

Poniendo ahora $\varphi = 90^{\circ}$ se tiene:

$$\mathrm{r} = a\left(1-\alpha\right) = b: \text{ radio polar del elipsoide}$$

y en consecuencia:

$$\boxed{\alpha = \frac{a-b}{a} : \text{achatamiento geométrico del esferoide}}$$

Repitiendo el razonamiento para la (2.21), y llamando $\beta = \left(2\mathbf{q} - \frac{3}{2}\mathbf{J_2} \right)$

$$\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{0} = \frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left(1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} - 2\mathbf{q}\right)\left[1 + sen^2(\varphi)\left(2\mathbf{q} - \frac{3}{2}\mathbf{J_2}\right)\right] = \frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left(1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} - 2\mathbf{q}\right)\left[1 + sen^2(\varphi)\beta\right]$$

$\varphi = 0^{\circ} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}_a = \frac{\mathrm{U}_0^2}{GM}\left(1 + \frac{\mathbf{J_2}}{2} - 2\mathbf{q}\right)$: gravedad normal en el Ecuador
$\varphi = 90^{\circ} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}_b = \boldsymbol{\gamma}_a\left(1+\beta\right)$: gravedad normal en los polos

de lo que resulta:

$$\boxed{\beta = \frac{\boldsymbol{\gamma}_b - \boldsymbol{\gamma}_a}{\boldsymbol{\gamma}_a} : \text{ achatamiento físico de la gravedad entre el Ecuador y los polos}}$$

Y además:

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma}_\mathbf{0} = \boldsymbol{\gamma}_a\left(1 + sen^2(\varphi)\beta\right) = \boldsymbol{\gamma}_a\left(1 + sen^2(\varphi)\frac{\boldsymbol{\gamma}_b - \boldsymbol{\gamma}_a}{\boldsymbol{\gamma}_a}\right)} \qquad (2.22)$$

Esta última representa la variación (***achatamiento físico***) de la gravedad entre el Ecuador y los polos. El valor de β = 0,004976673884 puede obtenerse como resultado de un gran número de mediciones gravimétricas.
La ecuación [11] entonces, provee el valor aproximado de la gravedad a nivel del esferoide normal, siendo el fundamento para la elaboración de las varias que se conocen como ***Fórmula Internacional de Gravedad (IGF)***, cuyo propósito es de proveer un valor de gravedad normal ó de referencia, fácilmente calculable en función de la latitud.

d) Síntesis teórica: ***Teorema de Clairaut***

$$\begin{cases} \alpha = \left(\dfrac{3}{2}\mathbf{J_2} + \dfrac{\mathbf{q}}{2}\right) \\ \beta = \left(2\mathbf{q} - \dfrac{3}{2}\mathbf{J_2}\right) \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$\alpha + \beta = \left(\frac{3}{2}\mathbf{J_2} + \frac{\mathbf{q}}{2}\right) + \left(2\mathbf{q} - \frac{3}{2}\mathbf{J_2}\right) = \frac{5}{2}\mathbf{q} \Rightarrow \beta = \frac{5}{2}\mathbf{q} - \alpha = 2\mathbf{q} - \frac{3}{2}\mathbf{J_2}$$

Es decir

$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{a-b}{a} + \frac{\gamma_b - \gamma_a}{\gamma_a} = \frac{5}{2}\mathbf{q} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 a^3}{GM}} \qquad (2.23)$$

Esta expresión debida a Clairaut (1738) , vincula la estrecha relación existente entre achatamiento (geométrico) terrestre, α, con la variación de la gravedad en función de la latitud, correspondiendo a una ***Tierra Normal, Ideal de masa M***.
Es importante hacer notar que de las mediciones gravimétricas no se obtiene el *tamaño*, sino solo el *achatamiento*, vale decir la *forma* de la Tierra, aceptada como elipsoidal o esferoidal.
Llegados aquí es útil recordar que partiendo de la expresión de Newton de la gravitación universal, y utilizando la única hipótesis de la Tierra como *cuerpo de rotación homogéneo casi esférico*, se consiguió expresar en forma aproximada las ***relaciones entre la gravedad y la geometría***.